

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE MARSEILLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

THÉODORE VOGEL

CHARGÉ DE RECHERCHES AU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

1^{re} THÈSE

SUR LES VIBRATIONS DE CERTAINS SYSTÈMES ÉLASTIQUES
DANS UN CHAMP SONORE

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

SUR LA MESURE DES CONTRAINTES ÉLASTIQUES
DANS LES MÉTAUX AU MOYEN DES RAYONS X

Soutenues le 26 Mars 1947, devant la Commission d'Examen

Jury	{	MM. J. PÉRÈS	{	Président.
		R. THIRY		Examineurs.
		P. ROUARD		
		F. CANAC		

SUR LES VIBRATIONS
DE CERTAINS SYSTÈMES ÉLASTIQUES
DANS UN CHAMP SONORE

VOGEL (Théodore). — Sur les vibrations de certains systèmes élastiques dans un champ sonore. — [Paris], Service de Documentation et d'Information technique, 1948. Gr. in-8°, [12]-84 p., 16 fig., 4 tabl.

Th., Sc. Phys., Marseille, 1947, no 39

VOGEL (Théodore). — Sur les vibrations de certains systèmes élastiques dans un champ sonore. — [Paris], Service de Documentation et d'Information technique, 1948. Gr. in-8°, [12]-84 p., 16 fig., 4 tabl.

Th., Sc. Phys., Marseille, 1947, no 39

VOGEL (Théodore). — Sur les vibrations de certains systèmes élastiques dans un champ sonore. — [Paris], Service de Documentation et d'Information technique, 1948. Gr. in-8°, [12]-84 p., 16 fig., 4 tabl.

Th., Sc. Phys., Marseille, 1947, no 39

VOGEL (Théodore). — Sur les vibrations de certains systèmes élastiques dans un champ sonore. — [Paris], Service de Documentation et d'Information technique, 1948. Gr. in-8°, [12]-84 p., 16 fig., 4 tabl.

Th., Sc. Phys., Marseille, 1947, no 39

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE MARSEILLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

THÉODORE VOGEL

CHARGÉ DE RECHERCHES AU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

1^{re} THÈSE

SUR LES VIBRATIONS DE CERTAINS SYSTÈMES ÉLASTIQUES
DANS UN CHAMP SONORE

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

SUR LA MESURE DES CONTRAINTES ÉLASTIQUES
DANS LES MÉTAUX AU MOYEN DES RAYONS X

Soutenues le 26 Mars 1947, devant la Commission d'Examen

Jury	{	MM. J. PÉRÈS	{	Président.
		R. THIRY		Examineurs.
		P. ROUARD		
		F. CANAC		



UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE

Mort au champ d'honneur :

M. F.-R. MARTY, Maître de Conférences de Mathématiques (14 juin 1940)

Doyen et Professeur honoraire : M. MARCHAUD

Professeurs honoraires : MM. CAULLERY, J. PÉRÈS, J. COTTE, H. BIERRY

Doyen : E. TRAYNARD

Assesseur : P. CHOUX

Secrétaire : H. LANFRANCHI

PROFESSEURS :

P. SÈVE	Physique industrielle.	R. THIRY	Mécanique rationnelle et mécanique des fluides.
A. TIAN	Chimie générale.	G. PETIT	Biologie animale.
M. KOLLMANN .	Zoologie générale.	H. PRAT	Biologie végétale.
J. BOSLER	Astronomie.	P. ROUARD	Physique générale.
E. TRAYNARD .	Calcul différentiel et intégral.	N.	Physiologie.
L. MARGAILLAN	Chimie industrielle.	R. CERIGHELLI .	Agronomie coloniale.
G. CORROY	Géologie et minéralogie.	J. VALENSI ...	
P. CHOUX	Botanique générale.		
E. RAYMOND ..	Chimie P.C.B.		

CHARGÉ DE COURS :

G. MORIN	Physiologie.
----------------	--------------

MAÎTRES DE CONFÉRENCES :

C. JAUSSERAN .	Physique P.C.B.	P. DESNUELLES	Chimie biologique et corps gras.
C. PAUC	Mathématiques.		
A. FAVRE	Mécanique des fluides.		

CHARGÉS DE CONFÉRENCES :

J. ROUCH	Océanographie.	E. CALVET	Chimie.
J. ROCHE	Chimie biologique.	J. TIMON-DAVID	Zoologie agricole.
M ^{me} TAXY-FABRE..	Géographie - physique et géologie appliquée.	A. FAVRE	Météorologie.
		G. MALCUIT ...	Botanique appliquée.

Maîtres de Conférences honoraires : MM. E. MEISSONNIER, H. BIMAR, D. RICARD



Digitized by the Internet Archive
in 2026

A Monsieur François CANAC,

Hommage reconnaissant

TABLE DES MATIÈRES

	PAGES
INTRODUCTION	1

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIE DE LA TRANSPARENCE DES SYSTÈMES ÉLASTIQUES DANS UN CHAMP SONORE

CHAPITRE PREMIER

Généralités - Expression de la transparence	7
1. — Systèmes étudiés dans ce travail	7
2. — Rappel de notions classiques de Mécanique	7
3. — Remarque sur le choix des coordonnées généralisées	10
4. — Transparence au son d'une paroi	10

CHAPITRE II

Sur le calcul approché de certaines sommes	12
5. — Position du problème	12
6. — Intégration dans l'espace de phase	12

CHAPITRE III

Plaque simple sous incidence normale	16
7. — Équations du mouvement, plaque rectangulaire	16
8. — Calcul de la transparence	17
9. — Comparaison avec la théorie de Davis	21
10. — Résultats à retenir	22
11. — Précisions d'ordre numérique	22
12. — Hublot circulaire	23

CHAPITRE IV

Plaque rectangulaire sous incidence oblique	26
13. — Allure générale de la solution	26
14. — Calcul des sommes intervenant dans la transparence	28

CHAPITRE V

Théorie du panneau à double paroi	31
15. — Position du problème	31
16. — Équations du mouvement	31

	PAGES
	—
17. — Pulsations propres du système couplé	34
18. — Transparence dans le cas de couplages lâches	35
19. — Couplages très serrés	38
CHAPITRE VI	
Extension aux systèmes à couplage monovalent	40
20. — Définition	40
21. — Conditions de possibilité d'un couplage monovalent	40
22. — Paroi double plaque et membrane	42
23. — Polyvalence de tout couplage restreint à une variété - Exemple.....	44
CHAPITRE VII	
Panneaux élastiques à revêtements poreux	47
24. — Représentation schématique du corps acoustiquement poreux	47
25. — Transparence d'une plaque encollée de matériau poreux	48
CHAPITRE VIII	
Plaque simple en deuxième approximation	51
26. — Amplitudes de vibration finies.....	51
27. — Vibrations d'une plaque travaillant au flambage	56
DEUXIÈME PARTIE	
ÉTUDE EXPÉRIMENTALE	
DES CARACTÉRISTIQUES DE TRANSPARENCE DE PANNEAUX ÉLASTIQUES	
CHAPITRE IX	
Vérifications expérimentales : méthode	61
28. — Importance de relevés continus et automatiques	61
29. — Obtention d'une échelle logarithmique des fréquences	62
30. — Amplification logarithmique des courants microphoniques	65
31. — Disposition des locaux pour les essais	66
CHAPITRE X	
Vérifications expérimentales : résultats	70
32. — Rappel des résultats théoriques cruciaux	70
33. — Expériences sur des plaques nues	71
34. — Doubles parois à intervalle d'air	73
35. — Plaques à revêtements poreux	74
CONCLUSIONS	78
36. — Valeur de la méthode; extensions possibles	78

INTRODUCTION

Le présent travail est la première partie d'une tentative faite pour éclaircir la question extrêmement complexe de l'acoustique d'une enceinte fermée, plongée dans un champ sonore, et en particulier de celle d'une carlingue d'avion en vol.

On sait que la théorie élémentaire suppose une diffusion parfaite de l'énergie acoustique à l'intérieur de l'enceinte : dans ces conditions, l'énergie de vibration en un point donné est la somme des apports de tous les « rayons sonores » passant par ce point. Un certain nombre de ces rayons proviennent directement de l'extérieur, et leur apport W est affaibli au facteur t de transparence de l'enceinte; d'autres (en quantité égale, par raison de symétrie) ont d'abord été réfléchis une fois sur la paroi intérieure, et leur apport est rtW (r facteur de réflexion intérieure); d'autres arrivent après deux réflexions, apportant par conséquent une énergie $r^2 tW$; et ainsi de suite. L'énergie totale au point considéré est donc (fig. 1) :

$$Wt(1 + r + r^2 + r^3 + \dots) = \frac{Wt}{(1 - r)} = \frac{Wt}{a},$$

où a est le facteur « d'absorption à la réflexion ».

Il suffit d'exposer cette théorie pour se rendre compte de son arbitraire. Une diffusion de l'énergie telle qu'on l'a postulée est-elle admissible, même comme première et grossière approximation des phénomènes ? Y a-t-il des raisons de postuler que les facteurs t et a sont des caractéristiques de la constitution de l'enceinte, et restent les mêmes en tous les points d'une paroi (à la supposer même homogène), en particulier quelle que soit l'incidence du rayon sonore ? Il est aisé de donner des noms aux rapports de grandeurs mesurables; cela ne leur confère qu'une existence fictive, tant qu'on n'a pas vérifié par l'expérience, et rendu intelligible par une théorie, la constance de ces rapports dans certaines conditions. C'est ce qu'a fort bien vu P.M. MORSE au sujet de la notion d'impédance acoustique d'une paroi, artifice d'écriture pour commencer, dont il s'est ensuite attaché, avec ses élèves, à montrer la constance pour un matériau donné, puis à établir les relations avec les propriétés mécaniques fondamentales de ce matériau (1).

Nous avons cherché, pour notre part, à débrouiller un peu les notions de transparence et d'absorption par réflexion, introduites par la théorie élémentaire, et dont

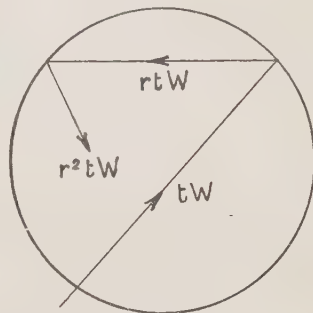


Fig. 1

(1) Voir dans la bibliographie (*in fine*) MORSE et BOLT, 1944, qui cite les travaux antérieurs; et HARRIS, 1945. Nous renverrons désormais à la bibliographie par simple indication du nom de l'auteur et de la date du mémoire.

le rôle reste important même si l'on ne retient pas celle-ci. En particulier, un gros avantage de ces notions est leur définition physique simple (sous réserve d'avoir à en montrer la légitimité), et par suite la possibilité de mesures directes qu'elles offrent. Et s'il apparaissait qu'elles sont impuissantes à fournir la solution du problème du bruit dans une enceinte fermée, à propos de quoi on les a évoquées, nous croyons que leur analyse nous aura fait pénétrer plus avant dans la compréhension du phénomène de l'absorption du son par des parois.

Dans le travail que nous présentons ici, nous traitons de la première de ces notions, celle de la transparence. Il y a longtemps que l'on a fait remarquer que la transmission du son par une paroi élastique résulte, non pas de la réfraction d'une onde sonore à travers le matériau, phénomène qui ne laisserait passer qu'une fraction infime de l'énergie incidente, mais bien de l'excitation par l'onde incidente de vibrations forcées de la paroi, lesquelles se communiquent à l'air en contact avec la face arrière (1). Nous ne connaissons d'autre tentative de développement de cette idée que celle où A.H. DAVIS traite d'un panneau élastique rectangulaire, considéré comme un piston vibrant tout d'une pièce (2); nous aurons plus loin l'occasion de discuter cette théorie, dont le caractère d'approximation un peu simple apparaît immédiatement.

En fait, les parois que l'on rencontre dans les carlingues d'avions sont, en général, constituées par des mailles de coques courbes (par exemple des éléments de cônes ou de cylindres) fixées à des « couples » et à des « raidisseurs » formant une espèce d'ossature; ces éléments sont encollés de revêtements poreux, feutres, etc., et doublés, à un certain écartement, de parois intérieures en bois mince, pégamoïd, ou autres matériaux. Parfois, au lieu de parois doubles, on a des parois multiples, où se succèdent le panneau élastique, encollé ou non, une couche d'air, un feutre ou autre absorbant (tendu ou flottant), une deuxième couche d'air, et ainsi de suite, jusqu'à la paroi intérieure en pégamoïd ou simili-cuir.

Nous nous sommes proposé d'étudier systématiquement les vibrations de systèmes dynamiques se rapprochant de plus en plus de cette construction. On se rappellera que la courbure des coques en question est toujours assez faible : nous avons donc commencé par supposer les mailles planes; de plus, nous avons considéré comme infiniment rigide leur armature, qui est en réalité élastique, et vibre elle-même en vol de façon non négligeable. Dans ces hypothèses, nous traitons successivement des vibrations, dans un champ normal, d'une plaque rectangulaire posée sur ses bords; puis d'une paroi double composée de deux panneaux élastiques, plaques ou membranes, séparées par un intervalle d'air occlus. Ce dernier problème, qui fait intervenir des systèmes continus couplés, peut cependant être aisément résolu grâce au caractère particulier du couplage par la couche d'air comprimée; nous avons donc, en passant, recherché les caractères généraux des systèmes couplés qui admettent la même simplification, et obtenu des résultats que nous nous proposons d'appliquer ultérieurement à des problèmes d'acoustique sortant du cadre que nous nous sommes tracé ici. Une extension de ce résultat nous a permis d'aborder, mais d'aborder seulement, l'approximation plus poussée dans laquelle les parois ne reposent plus sur un cadre rigide, mais sont liées à une armature

(1) DAVIS, 1927.

(2) DAVIS, 1933.

élastique; nous espérons pouvoir pousser ultérieurement la discussion de ce problème assez complexe.

Enfin, revenant sur les autres approximations faites en première analyse, nous examinons le cas d'une onde sonore tombant obliquement sur la plaque, celui où les amplitudes de vibration sont finies tout en restant faibles, et celui où l'armature vibre latéralement, ce qui soumet les panneaux à une contrainte de flambage : cette condition est, en effet, toujours réalisée en vol. Nous montrons que, dans tous les cas, la correction de deuxième approximation est très petite, ce qui renforce la validité de la première approximation.

Dans tous les problèmes ainsi abordés, la transparence se présente sous la forme d'une somme infinie de termes correspondant aux divers ordres de vibrations propres. Nous exposons une méthode de calcul approché de ces sommes, qui consiste à les remplacer par des intégrales définies, et appliquons cette méthode aux différents cas; ce qui nous fournit, soit une expression approchée de la transparence, soit une borne supérieure et une borne inférieure de celle-ci. Ces expressions permettent de tirer quelques conclusions générales sur l'absorption du son par les systèmes simples considérés; et il ne semble pas trop téméraire d'induire la validité de ces conclusions, mises sous une forme prudemment générale, pour les systèmes et conditions d'excitation plus complexes de la pratique, au moins en tant que première approximation. Les célèbres considérations de Lord RAYLEIGH sur les « systèmes approximativement simples » peuvent en effet nous guider ici.

Nous comptons mettre par la suite cette extension à l'épreuve d'expériences systématiques; mais il a d'abord fallu confronter nos résultats théoriques avec l'expérience, dans les conditions simples pour lesquelles ils ont été établis, et c'est de cette confrontation qu'il est rendu compte dans notre Chapitre X. Nous expliquerons plus loin, en détail, pour quelles raisons nous avons été amené, pour ce travail expérimental, à mettre au point une méthode de relevés automatique de caractéristiques de transparence en laboratoire; cette méthode peut servir d'outil commode pour des recherches ultérieures. Nos mesures, dont un certain nombre ont été faites, dans un but de classement qualitatif, à l'instigation du Groupement de Recherches Aéronautiques, ont porté sur un nombre assez considérable de panneaux de constitutions diverses; ce ne serait pas ici le lieu de discuter ceux de leurs points de différence dont notre théorie ne tient pas compte, si grand que puisse être leur intérêt pratique. Aussi n'avons-nous donné que les résultats d'expériences cruciales destinées à confirmer ou à infirmer chacune de nos conclusions générales; mais il est peut-être bon de souligner que de nombreux autres essais confirment ces résultats, avec des variantes de détail sans importance pour notre but actuel.

*
* * *

Toute cette partie expérimentale n'a pu être menée à bien que grâce aux belles installations du laboratoire d'acoustique, au Centre de Recherches S.I.M. de Marseille (1), et grâce à la généreuse compréhension et à la sympathie avec laquelle M. CANAC, Directeur de ce Centre, a toujours répondu à nos demandes. Nous tenons à le remercier

(1) CANAC, 1944; JANNIN, 1944; CANAC et VOGEL, 1946.

respectueusement ici de l'aide et des encouragements qu'il nous a prodigués. Ce nous est un agréable devoir de remercier aussi le personnel technique du Centre de Recherches S.I.M., et en particulier MM. KOBRYNSKI, assistant, et CORSAIN, radio-électricien, pour leur aide dans la réalisation des montages et des essais.

Enfin, nous voudrions exprimer notre respectueuse gratitude à MM. PÉRÈS, Membre de l'Institut, et ROCARD, Professeur à la Sorbonne, pour le bienveillant intérêt qu'ils ont témoigné à notre étude.

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIE
DE LA
TRANSPARENCE DES SYSTÈMES ÉLASTIQUES
DANS UN CHAMP SONORE

GÉNÉRALITÉS — EXPRESSION DE LA TRANSPARENCE

1. — Systèmes étudiés dans ce travail.

Nous nous occupons dans ce qui va suivre, et sauf indication spéciale, des oscillations de faible amplitude, autour de leur position d'équilibre, de systèmes élastiques continus ou de combinaisons de tels systèmes. Ces oscillations auront en général lieu sous l'action de forces extérieures dues à l'existence d'une onde acoustique plane; ces forces, dont l'intensité sera par exemple prise pour unité, seront des fonctions sinusoïdales du temps. La valeur de leur pulsation ω sera comprise dans la bande audible, c'est-à-dire inférieure à 10^5 , et, en général, nettement supérieure à 10^2 . Les dimensions des systèmes excités seront toujours supposées grandes devant la longueur d'onde des vibrations sonores excitatrices, et leur densité, grande devant celle de l'air ambiant.

2. — Rappel de notions classiques de Mécanique.

Rappelons très brièvement quelques résultats classiques relatifs aux équations de Lagrange et à leur application aux problèmes des petites oscillations. Parmi les propositions que nous énoncerons, certaines ne sont valables que dans les conditions spécifiées au n° 1 : nous ne répéterons pas cette restriction.

Tout système matériel peut être caractérisé, d'une infinité de façons, par un tableau de grandeurs q_m dites « coordonnées généralisées »; si l'on connaît la variation des q_m en fonction du temps t , le mouvement du système est déterminé. A chaque instant, les énergies cinétique et potentielle du système sont des formes quadratiques, à coefficients constants, respectivement des $\frac{dq_m}{dt} = \dot{q}_m$ et des q_m , soit :

$$(1) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j; \quad V = \frac{1}{2} \sum_{ij} b_{ij} q_i q_j \quad (a_{ij} = a_{ji}; b_{ij} = b_{ji}).$$

Les équations du mouvement du système sont alors :

$$(2) \quad \sum_j (a_{ij} \ddot{q}_j + b_{ij} q_j) = Q_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots,$$

où les $Q_i(t)$ sont les « composantes généralisées » de la force appliquée telles que $\sum Q_i \delta q_i$ soit le travail virtuel de la force en question.

On sait qu'il est toujours possible de réduire simultanément à leurs axes les matrices (a_{ij}) et (b_{ij}) au moyen d'un changement de coordonnées, et que ce mode de réduction est unique. Il existe donc un système de coordonnées q_m et un seul, dit « normal », moyennant lequel les matrices ci-dessus sont diagonales :

$$a_{ij} = b_{ij} = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j.$$

Les équations (2) s'écrivent alors :

$$(3) \quad a_{ii} \ddot{q}_i + b_{ii} \dot{q}_i = Q_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots,$$

ou encore :

$$(3') \quad c_i \dot{q}_i = Q_i,$$

c_i étant l'opérateur $a_{ii} \frac{d^2}{dt^2} + b_{ii}$. Le système se décompose donc en n systèmes indépendants à un degré de liberté. Si les Q_i sont nulles, les mouvements normaux (3) sont des vibrations sinusoïdales de pulsation :

$$\omega_{ii} = \left(\frac{b_{ii}}{a_{ii}} \right)^{\frac{1}{2}};$$

la suite des ω_i forme le « spectre des pulsations propres » du système.

Par ailleurs, l'état du système tel qu'il est défini physiquement ne peut en général être directement interprété connaissant les solutions $q_i(t)$ des (3); en fait, on demandera à connaître, en chaque « point » du système, la valeur d'une certaine fonction d'état, nulle à l'équilibre, et qui ne pourra prendre que de petites valeurs lors des petites oscillations dont on s'occupe. Pour les systèmes de points matériels, cette fonction d'état sera par exemple le déplacement d'un point à partir de sa position spatiale d'équilibre; mais ce pourrait aussi bien être, dans certains cas, une température, une charge électrique, etc.; ou bien les variables définissant les différents éléments qui composent le système pourront ne pas être spatiales (comme dans le cas de l'économétrie). Nous adopterons toutefois une fois pour toutes le langage de la dynamique, et parlerons des « coordonnées d'un point » du système, étant entendu que ces coordonnées peuvent être celles d'un point affixe dans un espace de phase à k dimensions; et du « déplacement » de ce point. Nous dénoterons ce déplacement par $u(x, y, \dots; t)$, ou, symboliquement, par $u(x; t)$, x étant mis pour l'ensemble des coordonnées.

L'ensemble des valeurs de u relatives à tous les points du système est évidemment un système de coordonnées généralisées acceptables, et qui doit se déduire du système normal des q_i par une transformation linéaire; on a donc :

$$(4) \quad u(x; t) = \sum_i q_i(t) f_i(x),$$

les coefficients f_i du développement dépendant de l'indice i et du point x considéré.

Ce développement étant toujours valable, on en déduit aisément que les f_i forment une suite complète, et sont orthogonales les unes aux autres; ce résultat classique signifie que :

$$(5) \quad \int_S f_i(x) f_j(x) dx = N_{ij},$$

où $N_{ij} = 0$ si $i \neq j$, et $N_{ii} = N_i$ est la « norme » des fonctions f_i , et où l'intégrale est étendue à tout le domaine spatial occupé par le système S en vibration. Toute fonction orthogonale à une f dans ce domaine, c'est-à-dire satisfaisant à (5), est elle-même une f .

Si l'on identifie les expressions des énergies cinétique et potentielle en fonction des u et des q , il vient, en désignant par m la masse par unité de volume, ou de surface, etc., du domaine spatial :

$$T = \frac{1}{2} \sum_i a_{ii} \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2} \int_S m \dot{u}^2(x) dx = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{q}_i^2 \int_S f_i^2(x) dx = \frac{1}{2} m \sum_i N_i \dot{q}_i^2,$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_i b_{ii} q_i^2 = \frac{1}{2} \int_S m \omega_i^2 u_i^2(x) dx = \frac{1}{2} m \sum_i N_i \omega_i^2 q_i^2,$$

d'où $a_{ii} = mN_i$, et $b_{ii} = mN_i \omega_i^2$.

Passons maintenant aux forces appliquées au système : elles seront données, dans l'espace x , par une fonction $F(x; t)$ qui pourra être développée suivant les $f_i(x)$, en vertu de la propriété fondamentale des suites complètes. On aura donc :

$$(6) \quad F(x; t) = \sum_i Q'_i(t) f_i(x),$$

et il est aisé de voir que les coefficients Q' de ce développement sont identiques, au facteur N_i près, aux forces généralisées figurant dans les (3) : car le travail virtuel du système est :

$$\int F \delta u dx = \int \sum_i Q'_i f_i \sum_j \delta q_j f_j dx = \sum_{ij} Q'_i \delta q_j \int f_i f_j dx = \sum_i Q'_i \delta q_i N_i,$$

et par conséquent la force généralisée relative à la coordonnée q_i est :

$$\frac{\delta}{\delta q_i} \sum Q'_j \delta q_j N_j = N_i Q'_i.$$

Or en multipliant les deux membres de (6) par $f_i(x)$ et en intégrant dans S, nous trouvons :

$$\int_S F(x; t) f_i(x) dx = \sum_j Q'_j(t) \int_S f_j(x) f_i(x) dx = N_i Q'_i(t);$$

d'où cette expression simple de la force généralisée :

$$(7) \quad Q_i(t) = \int_S F(x; t) f_i(x) dx.$$

Nous aurons presque toujours affaire dans ce qui suivra à un cas particulier, où Q_i se compose de deux termes : l'un petit et proportionnel à $\dot{q}_i$ (comme le serait un frottement; mais ici c'est un terme d'origine externe); l'autre d'amplitude constante et fonction sinusoïdale du temps, de pulsation ω , soit :

$$(7') \quad Q_i(t) = -mN_i \varepsilon_i \dot{q}_i + A_i \sin \omega t.$$

Les (3) deviennent alors :

$$(8) \quad c_i q_i = \ddot{q}_i + \varepsilon_i q_i + \omega_i^2 q_i = \frac{A_i}{mN_i} \sin \omega t,$$

équation différentielle classique, dont la solution de régime (c'est-à-dire abstraction faite d'un terme qui représente une oscillation libre naissant à l'instant où la force est appliquée, mais rapidement amortie) est :

$$(9) \quad \begin{aligned} q_i(t) &= \frac{A_i}{mN_i} [\varepsilon_i^2 \omega^2 + (\omega_i^2 - \omega^2)^2]^{-\frac{1}{2}} \cos(\omega t - \varphi_i) \\ &= |q_i| \cos(\omega t - \varphi_i), \end{aligned}$$

où φ_i est un angle de déphasage dont la valeur ne nous importera en général pas.

3. — Remarque sur le choix des coordonnées généralisées.

Il nous arrivera, lorsque pour des raisons particulières il y aura intérêt à considérer séparément des portions $S_1, S_2, \dots$, du système S , d'utiliser non pas les coordonnées normales de S , mais un système q_i^* dont un sous-ensemble ${}_j q_i^*$ sera normal pour S_j ; dans ce système, des termes rectangulaires apparaîtront dans les expressions relatives à S , mais toutes les fois que l'intégration devra être étendue au sous-espace S_j seulement, son résultat se présentera sous la forme d'une somme de carrés. Il pourra se faire que les ${}_j q_i^*$ n'interviennent dans aucune expression intéressant des portions de S autres que S_j : nous dirons alors que cette portion est disjointe dans le système q^* , et c'est dans ce cas, on le prévoit, que l'utilisation des coordonnées q^* pourra rendre le plus de services.

4. — Transparence au son d'une paroi.

Supposons que le système S , qui s'étend dans une certaine région de l'espace, partage le reste de l'espace en deux domaines que nous appellerons respectivement « avant » et « arrière », remplis d'air ou de tout autre milieu de densité très faible devant celle de S . Des forces harmoniques s'exercent sur la face S_1 de S en contact avec la région avant, soit $F(x; y)$ [x étendu à S_1]; ces forces exciteront dans S un régime vibratoire, qui se traduira en particulier par des déplacements $u(x; t)$ [x étendu à S_2] des points de la face S_2 en contact avec la région arrière. Ces déplacements, supposés petits, provoqueront des déplacements des molécules d'air de la région arrière en contact immédiat avec S_2 (les vitesses étant égales de part et d'autre de la surface frontière), d'où émission de son dans cette région de l'espace. Le système S aura ainsi joué le rôle

de « fenêtre » par laquelle le son aura pénétré de la région avant dans la région arrière, sans qu'il s'agisse pour autant de la « traversée » (par réfraction) de S par les ondes incidentes. Une extension évidente du cas optique nous incite à nommer « transparence » de S le rapport des énergies sonores moyennes émergente et incidente.

Pour la première de ces quantités, on a :

$$\overline{W_1^T} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{S_2} \frac{1}{2} \rho_1 c_1 \dot{u}^2(x; t) dx \quad (\rho_1 \text{ densité de l'air, } c_1 \text{ vitesse du son}),$$

soit :

$$\begin{aligned} \overline{W_1^T} &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{2} \rho_1 c_1 \int_{S_2} [\sum \dot{q}_i(t) f_i(t)]^2 dx \\ &= \frac{\rho_1 c_1}{2T} \sum_{ij} \int_0^T \dot{q}_i \dot{q}_j dt \int_{S_2} f_i(x) f_j(x) dx, \end{aligned}$$

et puisque $q_i = |q_i| \cos(\omega t - \varphi_i)$ et que $T = 2 \frac{\pi}{\omega}$:

$$\begin{aligned} \overline{W_1^T} &= \left(\frac{\rho_1 c_1 \omega^2}{2T} \right) \sum |q_i| |q_j| \int_{S_2} f_i f_j dx \int_0^T \sin(\omega t - \varphi_i) \sin(\omega t - \varphi_j) dt \\ &= \frac{1}{4} \rho_1 c_1 \omega^2 \sum |q_i| |q_j| \int_{S_2} f_i f_j \cos(\varphi_i - \varphi_j). \end{aligned}$$

En particulier, si les q sont des coordonnées *normales pour la face* S_2 , prise isolément (§ 3), de norme N , il reste :

$$\overline{W_1^T} = \frac{1}{4} \rho_1 c_1 \omega^2 N \sum |q_i|^2.$$

De même, l'énergie incidente est :

$$\overline{W_0^T} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{S_1} \frac{1}{2} \rho_0 c_0 \dot{u}_0^2(x; t) dx,$$

les $\dot{u}_0$ étant les vitesses de vibration du milieu avant au contact de S_1 ; l'onde sonore incidente étant supposée de la forme :

$$\dot{u}_0 = U(x) \sin \omega t,$$

$$\overline{W_1^T} = \frac{\rho_0 c_0}{2T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt \int_{S_1} U^2(x) dx = \frac{\rho_0 c_0}{4} N',$$

en posant $N' = \int_{S_1} U^2(x) dx$, donnée caractéristique du champ sonore incident. La transparence est, dans ces conditions :

$$(10) \quad \tau = \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_0 c_0} \right) \frac{N}{N'} \omega^2 \sum |q_i|^2.$$

CHAPITRE II

SUR LE CALCUL APPROCHÉ DE CERTAINES SOMMES

5. — Position du problème.

L'expression de la transparence se présente, d'après ce qui précède, sous la forme d'une somme de termes correspondant aux différentes vibrations propres, et fonctions du ou des indices qui caractérisent l'ordre de ces vibrations; les indices interviennent en général à la fois explicitement et par la pulsation propre qui en est fonction. En particulier, dans les systèmes étendus dans deux dimensions x, y , que nous aurons à étudier, chaque vibration propre est définie par deux indices r, s ($r, s = 1, 2, \dots$), et il lui correspond une pulsation propre $\omega_{rs} = \omega_{rs}(r, s)$. Nous verrons d'autre part que les termes $\tilde{c}_{rs}$ qui composent la transparence se présentent différemment suivant la parité des indices, de sorte qu'il y aura à sommer séparément ceux où r et s sont impairs, ceux où ils sont pairs, ceux où r est pair et s impair, et inversement. Dans les quatre cas, on passe d'un ordre au voisin en ajoutant ou en retranchant 2 à l'un des indices ou à tous les deux : cette remarque simple est essentielle pour l'établissement du mode de calcul qui va être exposé.

Le problème que nous allons essayer de résoudre est celui de l'évaluation approchée de $\sum F(r, s)$, où F est une fonction continue de ses arguments, mais la sommation n'est étendue qu'à l'une des quatre classes discrètes de valeurs entières ci-dessus, et ce pour des valeurs de r, s telles que ω_{rs} soit compris entre deux bornes ω' et ω'' numériquement élevées (c'est-à-dire beaucoup plus grandes que ω_{11}). Nous admettrons de plus que la forme de la fonction ω_{rs} est telle que l'un au moins des arguments doive être $\gg 1$ pour que $\omega_{rs} \gg \omega_{11}$.

6. — Remplacement des sommes à calculer par des intégrales.

Considérons le plan des variables r, s ; la formule des pulsations propres $\omega_{rs}(r, s) = \omega'$ y représente une famille de courbes dépendant du paramètre ω' , et d'autant plus éloignées de l'origine des coordonnées que ω' est plus grand. Suivant ce qui a été dit au § 5, les affixes des différentes vibrations propres qui interviennent dans une même somme $\sum F(r, s)$ forment les nœuds d'un quadrillage régulier de maille 2×2 , ou (ce qui revient au même) les centres d'un tel quadrillage. Si ω' est suffisamment élevé, l'aire enfermée entre la courbe $\omega_{rs} = \omega'$ et les axes $r = 0, s = 0$, peut être remplacée avec

une approximation suffisante par une aire limitée par des éléments du quadrillage en question. F étant une fonction continue de r et de s , il y a un point intérieur à chaque maille M où F vaut la moyenne de ses valeurs en tous les points de la maille, soit :

$$F(r_0, s_0) = \frac{1}{4} \iint_M F(r, s) dr ds;$$

nous admettrons, ce qui sera toujours vrai avec une bonne approximation, que ce point (r_0, s_0) coïncide avec le centre de la maille. Dans ces conditions, si S est l'aire totale enfermée entre deux courbes $\omega_{rs} = \omega'$ et $\omega_{rs} = \omega''$, la somme $\sum F(r, s)$ étendue à tous les nœuds (r_0, s_0) de S sera, avec une approximation suffisante :

$$(11) \quad F(r, s) = \frac{1}{4} \iint_S F(r, s) dr ds.$$

La façon dont on évalue l'intégrale est d'ailleurs indifférente, et l'on pourra changer de variables pour faciliter la quadrature sans avoir à modifier la validité ni le facteur $\frac{1}{4}$ de (11). En particulier, on pourra passer aux coordonnées polaires dans le plan de phase, encore que dans ce cas l'aire élémentaire ne soit pas de la même forme que la maille.

Ce changement de variables nous sera particulièrement utile dans le cas de systèmes où interviennent des plaques ou membranes rectangulaires : on sait en effet que les pulsations propres de ces vibrations ont la forme :

$$\omega_{rs} = K(r^2 a^{-2} + s^2 b^{-2}) \quad \text{ou} \quad \omega_{rs} = K(r^2 a^{-2} + s^2 b^{-2})^{\frac{1}{2}};$$

la transformation :

$$r = aR \cos \theta; \quad s = bR \sin \theta$$

transformera alors notre aire S en une autre comprise entre deux rayons vecteurs et deux arcs de cercle. Les limites d'intégration en θ sont légèrement différentes suivant qu'il s'agit du réseau des r, s pairs, ou impairs, etc.; mais on ne commettra pas grande erreur (toujours pour ω suffisamment grand) en adoptant partout les limites correspondant à un même cas, au premier par exemple : là, le point de régime propre le plus rapproché de l'axe polaire est obtenu pour $s = 1$, c'est-à-dire pour $\sin \theta = \frac{1}{bR}$; le point de régime propre le plus rapproché de l'axe des s , au contraire, correspond à $r = 1$, c'est-à-dire à $\cos \theta = aR$ (fig. 2). D'ailleurs, pour R grand, ces angles sont respectivement voisins de 0 et de $\frac{\pi}{2}$, de sorte qu'on pourra remplacer les limites précédentes par d'autres plus commodes pour le calcul :

$$\theta_1 = \arctg \left(\frac{1}{bR} \right); \quad \theta_2 = \arctg (aR).$$

Dans ces expressions, R est le rayon vecteur (constante donnée) qui correspond à la pulsation frontière de S . Ainsi, grâce à la transformation introduite, toutes les limites

d'intégration sont des constantes, ce qui simplifie considérablement les quadratures; d'autant plus que la fonction à intégrer se présentera, dans tous les problèmes que nous aurons à traiter, comme un produit :

$$F(r, s) = \Phi(R) \Psi(\operatorname{tg} \theta),$$

de sorte que nous aurons :

$$(12) \quad \sum_{\omega', \omega''} F(r, s) = \frac{1}{4} \int_{R'}^{R''} \Phi(R) \cdot abR dR \cdot \int_{\frac{1}{bR'}}^{\frac{aR''}{bR''}} \Psi(\operatorname{tg} \theta) \frac{d \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}.$$

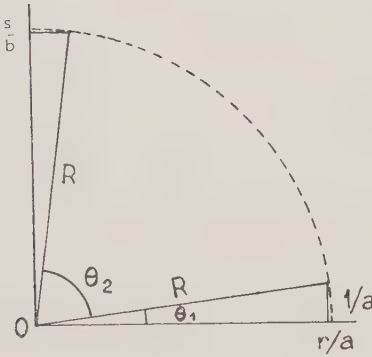


Fig. 2

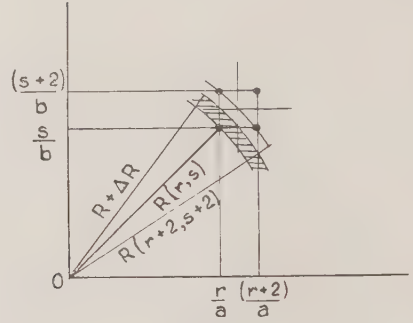


Fig. 3

L'une des principales applications que nous aurons à faire de ce procédé de calcul approché consistera en la sommation $\sum_{\omega} F(r, s)$ étendue à tous les termes qui résonnent à la pulsation donnée ω . A strictement parler, ces termes peuvent ne pas exister (puisque la suite des valeurs propres est discrète), ou bien se réduire à un ou deux seulement; mais pour le physicien parler de la pulsation ω signifie en réalité parler d'une bande de pulsations ($\omega, \omega + \Delta \omega$) suffisamment étroite. La largeur de cette bande est affaire de convention; nous la déterminerons par la condition que les bandes correspondant à des nœuds voisins du quadrillage soient contiguës, ce qui paraît raisonnable; cette condition correspond, pour l'incrément de R , à la valeur $\frac{1}{a}$ ou $\frac{1}{b}$ (fig. 3); nous prendrons donc la moyenne géométrique $\frac{1}{\sqrt{ab}}$ de ces deux expressions. Ainsi, la somme cherchée est :

$$(13) \quad \sum_{\omega} F(r, s) = \frac{ab}{4} \int_R^{R+\frac{1}{\sqrt{ab}}} \Phi(R) R dR \int_{\frac{1}{bR}}^{\frac{aR}{bR}} \Psi(t) \frac{dt}{1 + t^2}.$$

Les expressions (12) et (13) nous serviront dans les Chapitres suivants. On se rappellera qu'il convient de ne les utiliser que pour des sommes de termes dont les affixes sont tous suffisamment éloignés de l'origine, dans le plan de phase; et, d'autre part,

qu'elles ont pour but de fournir des valeurs à la fois approximatives et moyennes, de sorte que certaines valeurs des pulsations limites pourront donner, dans un calcul numérique exact, des sommes sensiblement différentes (à quelques décibels près, par exemple), sans que les lois générales de variation tirées des formules ci-dessus cessent de traduire approximativement l'allure des phénomènes. En fait, c'est parce que le procédé adopté « rabote » les courbes de variation de la transparence en fonction de la fréquence que nous ne devons pas nous étonner de ne pas retrouver par le calcul les nombreuses aspérités des caractéristiques expérimentales.

CHAPITRE III

PLAQUE SIMPLE SOUS INCIDENCE NORMALE

7. — Équations du mouvement, plaque rectangulaire.

Considérons un système S formé par une plaque élastique mince de forme rectangulaire, posée sur les bords d'une fenêtre de mêmes dimensions $a \cdot b$ pratiquée dans un mur plan indéfini parfaitement rigide; et supposons qu'il existe dans la région « avant » une source sonore émettant des ondes planes parallèles à la plaque, de sorte que la vitesse des molécules d'air au contact de la face S_1 soit, en tout point, $\dot{u}_0 = \sin \omega t$.

Prenons des axes x, y coïncidant avec deux des bords de la plaque, de sorte que celle-ci soit limitée par les droites $x = 0; x = a; y = 0; y = b$. Les fonctions propres de la plaque (posée sur les bords) sont :

$$f_{rs}(x, y) = \sin \frac{r \pi x}{a} \sin \frac{s \pi y}{b} \quad (r, s = 1, 2, 3, \dots),$$

de norme $N = \frac{ab}{4}$; et ses pulsations propres :

$$\omega_{rs} = \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{Ec^3}{12m(1-\sigma^2)}} \cdot \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right),$$

où E est le module de Young, σ le coefficient de Poisson, c l'épaisseur de la plaque, m sa masse par unité de surface. Il ne nous reste, pour écrire l'équation (3) du mouvement sous forme explicite, qu'à calculer la force généralisée Q_{rs} .

Or, la force $F(x, y; t)$ qui agit sur la plaque est due à la pression des molécules d'air; si $\dot{u}_0$ est leur vitesse dans l'onde incidente, $\dot{u}_0^*$ dans l'onde réfléchie, et que $\dot{u}$ soit la vitesse de déplacement de la plaque,

$$F(x, y; t) = \rho c (\dot{u}_0 - \dot{u}_0^* - \dot{u}).$$

Mais la condition de continuité est $\dot{u}_0 + \dot{u}_0^* = \dot{u}$; donc :

$$(14) \quad F(x, y; t) = 2 \rho c (\dot{u}_0 - \dot{u}),$$

et, dans notre cas particulier où $\dot{u}_0 = \sin \omega t$ et $u = \sum q_{rs} f_{rs}$:

$$(14') \quad F(x, y; t) = 2 \rho c \sin \omega t - 2 \rho c \sum_{ij} \dot{q}_{ij}(t) f_{ij}(x, y).$$

La force généralisée est donc, par (7) :

$$Q_{rs}(t) = 2 \rho c \sin \omega t \int_0^a \int_0^b \sin \frac{r \pi x}{a} \sin \frac{s \pi y}{b} dx dy - 2 \rho c \sum_{ij} \dot{q}_{ij} \cdot \frac{ab}{4} \cdot \delta_{rs, ij},$$

ou enfin :

$$(15) \quad Q_{rs}(t) = \frac{2 \rho cab}{\pi^2 rs} (1 - \cos r \pi) (1 - \cos s \pi) \sin \omega t - \frac{\rho cab}{2} \dot{q}_{rs}.$$

Nous nous trouvons bien dans le cas (7'), avec $\varepsilon_{rs} = 2 \rho \frac{c}{m}$ (indépendant de r, s) et $A_{rs} = \left(\frac{2 \rho cab}{\pi^2 rs} \right) (1 - \cos r \pi) (1 - \cos s \pi)$, et l'équation du mouvement en q_{rs} est :

$$(16) \quad \ddot{q}_{rs} + \left(\frac{2 \rho c}{m} \right) \dot{q}_{rs} + \omega_{rs}^2 q_{rs} = \frac{4 A_{rs}}{mab} \sin \omega t.$$

Pour tous les modes de vibration propre où l'un des indices r, s est pair, A_{rs} s'annule, et l'on a affaire à une oscillation libre amortie, que nous pouvons par conséquent négliger. Il ne reste donc à considérer que les modes r et s impairs, régis par les équations :

$$(17) \quad \ddot{q}_{rs} + \left(\frac{2 \rho c}{m} \right) \dot{q}_{rs} + \omega_{rs}^2 q_{rs} = \frac{32 \rho c}{\pi^2 rsm} \sin \omega t,$$

qui sont de la forme (8), et dont la solution de régime s'écrit, conformément à (9) :

$$(18) \quad q_{rs} = \frac{1,6}{rs \omega} \left[1 + \beta_{rs}^2 \left(\frac{x_{rs}^2 - 1}{x_{rs}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \sin(\omega t - \varphi_{rs}),$$

avec :

$$\beta_{rs} = \frac{m \omega_{rs}}{2 \rho c}; \quad x_{rs} = \frac{\omega_{rs}}{\omega}; \quad \text{tg } \varphi_{rs} = \frac{x_{rs}}{\beta_{rs} (x_{rs}^2 - 1)}.$$

La transparence (10) sera alors :

$$(19) \quad \bar{\epsilon} = \sum \bar{\epsilon}_{rs} = \sum |q_{rs}|^2 \cdot \frac{\omega^2}{4} = \sum \frac{0,64}{r^2 s^2} \cdot \frac{1}{1 + \beta_{rs}^2 \left(\frac{x_{rs}^2 - 1}{x_{rs}} \right)^2}.$$

8. — Calcul de la transparence en termes finis.

Nous allons commencer par remplacer (19) par une approximation de maniement plus commode, en considérant, au lieu de la courbe vraie $\bar{\epsilon}_{rs}(\omega)$, trois tronçons de courbe d'expressions analytiques simples.

On voit immédiatement que $\bar{c}_{rs}$ est symétrique en $\log x_{rs}$; pour $x_{rs} = 1$, il y a un maximum dont la valeur $\frac{0,64}{r^2 s^2}$ est indépendante du paramètre β_{rs} . De part et d'autre de ce maximum ou pointe de résonance, la décroissance est rapide : si nous cherchons les pulsations à partir desquelles $\bar{c}_{rs}$ est inférieure à $\frac{1}{A}$ du maximum, il nous faut résoudre l'inégalité :

$$\frac{|\omega^2 - \omega_{rs}^2|}{\omega} \leq \frac{2 \rho c}{m} \sqrt{A - 1},$$

soit, puisqu'au voisinage de la résonance $\omega \approx \omega_{rs} \approx 2 \omega$:

$$\Delta \omega \leq \frac{2 \rho c}{m} \sqrt{A - 1}.$$

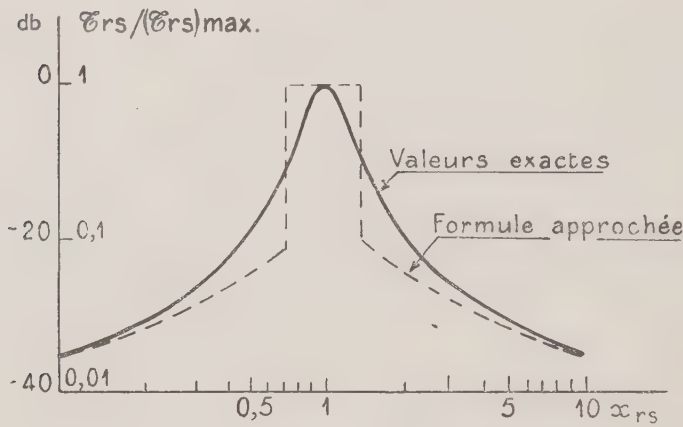


Fig. 4. — Variation de $\bar{c}_{rs}$ avec x_{rs} , pour $\beta_{rs}^2 = 50$

La largeur de la pointe, mesurée au niveau $\frac{1}{A}$, sera $2 \Delta \omega$, soit pour fixer les idées pour $A = 10$, $2 \Delta \omega = \frac{6 \rho c}{m}$ de l'ordre de quelques centaines dans les cas usuels où $m = O(10^{-1})$. Cette largeur est donc relativement très faible si la pulsation est élevée; on notera qu'elle est indépendante en valeur absolue du rang (r, s) .

Dès qu'on quitte la bande de résonance ainsi définie, $\bar{c}_{rs}$ se confond pratiquement avec :

$$\frac{0,64}{r^2 s^2 \beta_{rs}^2 x_{rs}^2},$$

pour $x_{rs} > 1$, et avec :

$$\frac{0,64 x_{rs}^2}{r^2 s^2 \beta_{rs}^2},$$

pour $x_{rs} < 1$; de sorte que nous remplacerons la courbe exacte par les deux arcs en question et par l'horizontale $\frac{0,64}{r^2 s^2}$ à l'intérieur de la bande de résonance. Pour fixer les idées sur le degré d'approximation, nous avons tracé la *figure 4* pour la valeur du paramètre

$\beta_{rs}^2 = 50$, correspondant à $m = O\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\omega_{rs} = O(3\,000)$: on voit que la coïncidence est fort acceptable.

Dans ces conditions, si l'on se donne une valeur quelconque, mais suffisamment élevée, de la pulsation forcée ω , on pourra pour tout ordre (r, s) faire l'approximation ci-dessus, et, en groupant les termes de (19) suivant la nature du tronçon sur lequel se trouve le point x_{rs} qui correspond à ω , écrire :

$$(20) \quad \bar{c} = 0,64 \sum_{\omega} \frac{1}{r^2 s^2} + \frac{0,64}{\left(\frac{m}{2\rho c}\right)^2} \sum_{>\omega} \frac{1}{r^2 s^2 \omega_{rs}^4} + \frac{0,64}{\omega^2 \left(\frac{m}{2\rho c}\right)^2} \sum_{<\omega} \frac{1}{r^2 s^2},$$

où $\sum_{\omega}$ désigne la somme des termes qui résonnent au voisinage de ω (au sens du Chapitre II), et $\sum_{>\omega}$, $\sum_{<\omega}$ celles des termes qui résonnent au delà ou en-deçà de ce voisinage.

Le calcul dont la théorie a été faite au Chapitre II doit donc porter sur les deux fonctions :

$$F_1(r, s) = \frac{1}{r^2 s^2}; \quad F_2(r, s) = \frac{1}{r^2 s^2 \omega_{rs}^4},$$

dont les transformées en R, θ sont respectivement :

$$\Phi_1(R) \Psi_1(\theta) = \frac{1}{a^2 b^2 R^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta},$$

$$\Phi_2(R) \Psi_2(\theta) = \frac{1}{a^2 b^2 K^4 R^{12} \sin^2 \theta \cos^2 \theta}.$$

Nous avons donc par (13) :

$$\begin{aligned} \sum_{\omega} \frac{1}{r^2 s^2} &= \frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}}^{\mathbf{R} + \frac{1}{\sqrt{ab}}} \frac{abR dR}{a^2 b^2 R^4} \int_{\frac{1}{bR}}^{aR} \frac{1+t^2}{t^2} dt = \frac{1}{4ab} \left[\frac{1}{2R^2} \right]_{\mathbf{R} + \frac{1}{\sqrt{ab}}}^{\mathbf{R}} \cdot \left[\frac{t-1}{t} \right]_{\frac{1}{bR}}^{aR} \\ &= \frac{1}{8ab} \frac{\frac{2R}{\sqrt{ab}} + \dots}{R^4 + \dots} [(a+b)R + \dots], \end{aligned}$$

et enfin :

$$(21) \quad \sum_{\omega} \frac{1}{r^2 s^2} = \frac{K}{4ab\omega} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{ab}},$$

lorsque $R^2 = \frac{\omega}{K}$ est grand devant $\frac{1}{ab}$.

Pour calculer $\sum_{<\omega}$, nous avons vu qu'il nous était interdit de recourir directement à l'intégration. Mais il sera licite d'écrire :

$$\sum_{<\omega} = \sum_{\infty} - \sum_{>\omega}$$

en désignant, par $\sum$, la sommation étendue à tous les r, s impairs, depuis 1,1 jusqu'à ∞, ∞ . Or, la série infinie $\frac{1}{r^2 s^2}$ étant absolument convergente, nous pouvons en regrouper les termes, et écrire :

$$\sum_{r,s} \frac{1}{r^2 s^2} = \sum_r \left(\frac{1}{r^2} \sum_s \frac{1}{s^2} \right) = \left(\sum \frac{1}{(2n+1)^2} \right)^2 = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right)^2;$$

mais on se rappellera que :

$$f(z) = \frac{\cos z}{1^2} + \frac{\cos 3z}{3^2} + \frac{\cos 5z}{5^2} + \dots = \frac{\pi(\pi - z)}{8},$$

donc :

$$(22) \quad \sum_{\infty} \frac{1}{r^2 s^2} = [f(0)]^2 = \frac{\pi^4}{64} \neq \frac{1}{0,64}.$$

D'autre part :

$$(23) \quad \sum_{>\omega} \frac{1}{r^2 s^2} = \frac{ab}{4} \int_R^{\infty} \frac{dR}{a^2 b^2 R^3} \int_{\frac{1}{bR}}^{aR} \frac{1+t^2}{t^2} dt = \frac{a+b}{8abR} = \frac{a+b}{8ab} \left(\frac{K}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}};$$

par conséquent :

$$(24) \quad \sum_{<\omega} \frac{1}{r^2 s^2} = \frac{1}{0,64} - \frac{a+b}{8ab} \left(\frac{K}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Enfin, pour la troisième somme partielle :

$$(25) \quad \sum_{>\omega} F_2(r, s) = \frac{ab}{4} \int_R^{\infty} \frac{dR}{a^2 b^2 K^4 R^{11}} \int_{\frac{1}{bR}}^{aR} \frac{1+t^2}{t^2} dt = \frac{(a+b) K^{\frac{1}{2}}}{40 ab \omega^{\frac{9}{2}}}.$$

En portant toutes ces expressions dans (20), il vient :

$$(26) \quad \mathfrak{C} = \frac{0,16 (a+b) K}{a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}} \omega} + \frac{4 \rho^2 c^2}{m^2 \omega^2} \left[1 - \frac{0,064 (a+b) K^{\frac{1}{2}}}{ab \omega^{\frac{1}{2}}} \right].$$

Le deuxième terme du crochet sera en général petit devant 1; mais nous pouvons écrire, en tous cas :

$$(26') \quad \frac{0,16 (a+b) K}{a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}} \omega} < \mathfrak{C} < \frac{0,16 (a+b) K}{a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}} \omega} + \frac{4 \rho^2 c^2}{m^2 \omega^2}.$$

Dans une publication antérieure (1) nous avons fait des approximations qui reviennent en somme à envisager une plaque carrée de même surface ab que la plaque donnée; dans cette hypothèse, (26') devient :

$$(26'') \quad \frac{0,32 K}{ab \omega} < \bar{\epsilon} < \frac{0,32 K}{ab \omega} + \frac{4 \rho^2 c^2}{m^2 \omega^2};$$

c'est bien la formule que nous avons donnée dans le travail en question.

On remarquera que tout se passe finalement comme si nous avions négligé de prime abord les termes qui résonnent au-dessus de ω , ce qui ne paraît pas déraisonnable, puisque la pulsation forcée étant supposée grande il ne peut s'agir que d'ordres r , s grands, donc de termes affectés d'un facteur $\frac{1}{r^2 s^2}$ très petit.

9. — Comparaison avec la théorie de Davis.

Le problème que nous venons de traiter a été résolu par A.H. DAVIS (2), qui a considéré simplement le panneau comme un piston vibrant parallèlement à lui-même; le système est alors à un seul degré de liberté, et donne, après des calculs élémentaires :

$$\bar{\epsilon}_D = \frac{1}{1 + \left(\frac{m}{2 \rho c}\right)^2 \Omega^2 \left(\frac{1-x^2}{x}\right)^2},$$

où $x = \frac{\omega}{\Omega}$ et Ω est la pulsation propre du piston. DAVIS écrit à la vérité une expression de cette pulsation propre en fonction de la « contrainte élastique du panneau », mais il ne peut s'agir que d'un artifice de langage, car cette contrainte d'un piston fictif n'a aucune signification précise. Il paraît raisonnable de prendre pour Ω la valeur effective de la pulsation propre fondamentale du panneau réel, soit dans notre notation :

$$\Omega = \omega_{11} = K (a^{-2} + b^{-2});$$

alors, si ω est assez grand (d'où x grand) on aura l'approximation analogue à celles qui nous ont servi ci-dessus :

$$(27) \quad \bar{\epsilon}_D = \frac{4 \rho^2 c^2}{m^2 \omega^2};$$

la transparence, selon DAVIS, serait donc égale à notre terme correctif tout seul. On peut prévoir, d'après ce qui en a été dit ci-dessus, un écart entre les formules (26) et (27) d'autant plus important que la maille sera de plus faible surface; ce qui est d'ailleurs intuitif, la fixation du contour influençant alors la déformée de la plaque dans de grandes proportions, et rendant illicite son assimilation à une parallèle à la position d'équilibre (ce à quoi revient l'hypothèse de DAVIS).

(1) VOGEL, 1946 *a*.

(2) DAVIS, 1933.

10. — Résultats à retenir.

1° *Effet de la dimension des mailles.* — On voit qu'à l'approximation adoptée la borne inférieure de la transparence varie en raison inverse de la surface de la plaque vibrante, c'est-à-dire, en pratique, des mailles de l'armature rigide à quoi le panneau est fixé, ces mailles subdivisant le panneau en rectangles ab que l'on suppose vibrer séparément. La borne supérieure varie moins vite avec ab , puisqu'elle contient un terme indépendant des dimensions; mais celui-ci sera surtout sensible aux graves, puisqu'il est en ω^{-2} . En augmentant la surface des mailles, on doit donc améliorer l'absorption du panneau, à coup sûr aux aiguës, sans doute moins aux graves. C'est là un premier résultat que nous aurons à confronter avec l'expérience.

2° *Effet de la masse par unité de surface.* — Soit μ le rapport des masses m , m' de deux panneaux identiques d'ailleurs : la borne inférieure de τ variera comme K , c'est-à-dire comme $\mu^{\frac{1}{2}}$, et le terme correctif de la borne supérieure comme μ^2 . En augmentant la charge unitaire d'un panneau, c'est-à-dire en faisant $\mu < 1$, on accroît l'absorption; la borne inférieure varie relativement peu (de 1,5 db lorsque la charge est doublée); aux graves, l'influence de la surcharge est importante, car elle peut diminuer le terme correctif jusqu'à le rendre négligeable. L'effet de la surcharge serait donc un accroissement d'absorption, surtout marqué aux graves : résultat que nous aurons à appliquer à propos des plaques à revêtements poreux.

11. — Précisions d'ordre numérique.

1° Dans la partie expérimentale de ce travail, il sera question plus longuement de cas concrets et de résultats numériques. Il est bon toutefois, pour fixer les idées, de voir dès à présent quels sont les ordres de grandeur des différentes expressions rencontrées. Prenons le cas typique d'une plaque en tôle d'Al de 1 mm d'épaisseur et de 1 m² de surface : nous aurons $K = 1,48 \cdot 10^5 \neq 10^5$; $ab = 10^4$; $m = 0,27$. La pulsation fondamentale sera 20 ($\neq 3$ Hz), de sorte que toute pulsation forcée de la bande acoustique, mettons $\omega = 10^4$, correspondra à une vibration propre dont l'un au moins des indices sera très élevé :

$$r^2 + s^2 = \frac{ab \omega}{K} = 10^3.$$

On comprend que soit négligeable, dans ces conditions, la somme $\sum_{>\omega} \frac{1}{r^2 s^2}$, où aucun des termes n'est supérieur à 10^{-3} ; les deux autres sommes partielles valent respectivement $\frac{10}{\omega}$ et $2 \cdot \frac{10^4}{\omega^2}$, la première l'emportant rapidement dès que ω dépasse 2000 ;

2° Nous pouvons maintenant préciser, sur un cas concret, ce qui a été dit à la fin du § 6 sur le caractère d'approximation moyenne de (13). Prenons donc la formule (21) qui en dérive pour $F = (rs)^{-2}$, et appliquons-la au cas d'une plaque carrée de surface ab : nous écrirons $\omega_{rs} = \frac{K}{ab} (r^2 + s^2) = \left(\frac{K}{ab}\right) R^2$, et notre formule donne alors pour $\sum_{\omega}$ la valeur $\frac{K}{2ab \omega} = \frac{1}{2} R^2$. Dessinons le quadrillage aux valeurs propres dans le plan

de phase (fig. 5), et cherchons directement $\sum_{\omega}$ pour $R = 1$ (donc entre $R = 1$ et $R = 2$), pour $R = 2$ (entre 2 et 3), et ainsi de suite : nous voyons que toutes les bandes de résonance dont la borne inférieure est un R impair contiendront les points affixes $(R, 1)$ et $(1, R)$, et que par conséquent la partie principale de la somme cherchée est pour elles $\frac{2}{R^2}$, soit 6 db au-dessus de notre approximation. En revanche, les bandes alternantes à R pair contiendront au mieux des termes (R, j) et (j, R) où j croît avec R et prend successivement les valeurs 3, 5, ..., de sorte que dans ces bandes la partie principale de la somme cherchée sera au mieux $\frac{2}{R^2 j^2}$, inférieure ou égale à $\frac{2}{9 R^2}$, soit au moins 3,5 db au-dessous de (21).

Ainsi, lorsqu'on prendra successivement $\sum_{\omega}$ pour les bandes adjacentes $R = 1, 2, 3, \dots$, on obtiendra des points dont l'un sur deux sera situé à 6 db au-dessus de la courbe (21), et l'autre au-dessous de cette courbe et s'en écartant lentement lorsque R croît. Il faut d'ailleurs se rappeler que nous avons choisi pour faire notre comparaison une suite arbitraire de fréquences, correspondant à des valeurs numériques entières de R aux frontières ; pour d'autres suites on pourra avoir des valeurs quelconques comprises entre les limites ci-dessus, aucune bande ne pouvant contenir plus d'un point $(R, 1)$ [sans compter son image

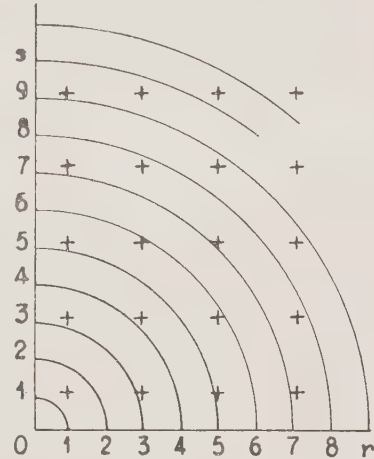


Fig. 5

$(1, R)$] et toute suite de bandes comprenant un terme sur deux de ce genre. Il en résulte que, si nous ne pouvons attribuer à (21) la signification rigoureuse d'une moyenne, du moins avons-nous là une expression dont la valeur est toujours comprise entre les bornes extrêmes des valeurs vraies possibles, et il semble probable que cette expression ne s'écarte pas beaucoup de la moyenne vraie. Nous remarquerons, par la même occasion, que l'écart *en moins* (bandes impaires) prend sa valeur définitive de 6 db dès $R = 1$, et que l'écart *en plus* (bandes paires) n'est infini que pour les bandes $R = 0, R = 2, R = 6$ qui ne contiennent pas de points affixes; de sorte qu'en réalité la formule, que nous avons décidé de ne pas appliquer trop près de l'origine, ne donne pas une image trop déformée de ce qui se passe dans cette région même, si on la considère comme une majorante des $\sum_{\omega}$ vraies.

12. — Hublot circulaire.

Nous allons aussi considérer brièvement, à cause des applications pratiques importantes, le cas d'une plaque sertie dans un hublot de forme circulaire et de rayon a . Les fonctions propres sont ici :

$$(28) \quad f_{rs}(R, \varphi) = \cos r \varphi \cdot [J_r(p_{rs} R) + A_{rs} I_r(p_{rs} R)],$$

où R et φ sont les coordonnées polaires d'un point du plan du hublot, le centre étant pris pour pôle; J_r et I_r sont les fonctions de Bessel d'arguments réel et imaginaire, d'ordre r ; A_{rs} est un coefficient déterminé par la condition $f_{rs}(a, \varphi) = 0$, d'où :

$$J_r(p_{rs} a) + A_{rs} I_r(p_{rs} a) = 0;$$

et enfin p_{rs} a pour valeur approchée :

$$p_{rs} = \frac{\pi}{a} \left(\frac{r}{2} + s \right),$$

avec une approximation très suffisante même pour le terme fondamental. Toutes ces expressions sont classiques.

Reprenons les raisonnements et calculs faits au sujet de la plaque rectangulaire : pour avoir l'expression de Q_{rs} analogue à (7), il nous faut avant tout calculer l'intégrale des (28); celle-ci :

$$\Lambda_{rs} = \int_0^{2\pi} \cos r \varphi d\varphi \cdot \int_0^a [J_r(p_{rs} R) + A_{rs} I_r(p_{rs} R)] R dR$$

est visiblement nulle, pour toute valeur non nulle de r ; tout comme les ordres r, s impairs intervenaient seuls dans le problème précédent aux vibrations forcées, ici n'interviendront que les ordres 0, s ($s = 1, 2, 3, \dots$). Achéons le calcul :

$$\begin{aligned} \Lambda_{0s} &= 2\pi \int_0^a [J_0(p_{0s} R) + A_{0s} I_0(p_{0s} R)] R dR \\ &= 2\pi \cdot \left(\frac{a}{p_{0s}} \right) \left[J_1(p_{0s} a) - \frac{J_0(p_{0s} a)}{I_0(p_{0s} a)} \cdot I_1(p_{0s} a) \right]. \end{aligned}$$

L'argument $p_{0s} a \neq \pi s$ est suffisamment grand pour que, dès le terme fondamental, nous puissions admettre les approximations classiques :

$$J_0(\pi s) = \frac{\cos \pi s}{\pi s^2}; \quad J_1(\pi s) = -J_0(\pi s); \quad I_0(\pi s) = \frac{\exp \pi s}{\pi \sqrt{2s}} = I_1(\pi s);$$

d'où :

$$(29) \quad \Lambda_{0s} = \frac{-4 a^2 \cos \pi s}{\pi s^2}; \quad \Lambda_{0s}^2 = \frac{16 a^4}{\pi^2 s^3}.$$

De même pour la norme des (28) :

$$\begin{aligned} N_{0s} &= \int_0^{2\pi} \cos^2 r \varphi d\varphi \cdot \int_0^a R dR [J_0^2(p_{0s} R) + A_{0s}^2 I_0^2(p_{0s} R) + 2 A_{0s} J_0(p_{0s} R) I_0(p_{0s} R)] \\ &= 2\pi \cdot \frac{a^2}{2} \left\{ J_0'^2(p_{0s} a) + J_0^2(p_{0s} a) + \frac{J_0^2(p_{0s} a)}{I_0^2(p_{0s} a)} [I_0'^2(p_{0s} a) - I_0^2(p_{0s} a)] \right\}, \end{aligned}$$

$$(29') \quad N_{0s} = \frac{2 a^2}{\pi s}.$$

Nous pouvons maintenant écrire l'équation du mouvement en q_{0s} :

$$(30) \quad \ddot{q}_{0s} + \frac{2 \rho c}{m} \dot{q}_{0s} + \omega_{0s}^2 q_{0s} = \frac{2 \rho c}{m} \cdot \frac{\Lambda_{0s}}{N_{0s}} \cdot \sin \omega t,$$

qui ne diffère de (17) que par la substitution de $\frac{\Lambda_{0s}}{N_{0s}}$ à $\frac{16}{\pi^2 r s}$. La transparence est donc :

$$\tau = \sum \left(\frac{\Lambda_{0s}}{N_{0s}} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \beta^2 \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right)^2} = \sum \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \beta^2 \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right)^2},$$

où les pulsations propres sont d'ailleurs :

$$\omega_{0s} \neq \frac{K s^2}{a^2},$$

avec la même valeur de K , toutes choses égales d'ailleurs, que pour la plaque rectangulaire.

Nous écrirons, comme au § 6 :

$$\tau = \sum_{\omega} \left(\frac{1}{s} \right) + \left(\frac{\rho c}{m} \right)^2 \left[\sum_{>\omega} \frac{\omega^2}{s \omega_{0s}^4} + \sum_{<\omega} \frac{1}{s \omega^2} \right].$$

La première somme ne contient que le seul terme résonnant à la pulsation forcée (encore n'existe-t-il pas toujours aux aiguës, où la largeur de la pointe de résonance est inférieure à l'écart toujours croissant des pulsations propres), soit $\frac{1}{s} = \left(\frac{K}{a^2 \omega} \right)^{\frac{1}{2}}$, au plus.

La deuxième somme est majorée par :

$$\sum_{>\omega} \frac{1}{s \omega_{0s}^2} = \frac{a^4}{K^2} \sum_{>\omega} \frac{1}{s^5},$$

qui est négligeable à cause de la convergence extrêmement rapide de $\sum_{\infty} \frac{1}{s^5}$, qui atteint ce qui est pratiquement sa valeur finale dès les tout premiers termes. Il reste donc $\left(\frac{\rho c}{m \omega} \right)^2 \sum_{<\omega} \frac{1}{s}$; la série harmonique est bien divergente, mais pratiquement on ne dépassera jamais $s = 40$ à 50 sans sortir de la bande acoustique, de sorte que nous pouvons sans grande erreur remplacer la somme $\sum_{<\omega}$ par 4 , sa valeur lorsqu'on l'arrête vers le quarantième terme. Finalement :

$$\tau = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{K}{\omega}} + \frac{4 \rho^2 c^2}{m^2 \omega^2}.$$

On retrouve le « terme de Davis », tout comme dans le cas de la plaque rectangulaire; l'autre terme est à variation moins rapide que pour un rectangle, et jouerait par conséquent un rôle plus important aux aiguës, n'était la dispersion des pulsations propres qui rend sa présence un peu problématique dans cette région de la bande des fréquences.

PLAQUE RECTANGULAIRE SOUS INCIDENCE OBLIQUE

13. — Allure générale de la solution.

Nous avons supposé dans le Chapitre III que le front des ondes sonores était parallèle au plan de la plaque; voyons maintenant comment le phénomène est modifié lorsque l'incidence est oblique.

Soit $(x \cos \theta + y \sin \theta) \cos \varphi + z \sin \varphi = 0$, l'équation de la surface d'onde passant par le point 0 de la plaque, où nous supposons toujours la vitesse des molécules incidentes être $\dot{u}_0 = \sin \omega t$. Tout point $(x, y, 0)$ de la plaque est à une distance :

$$d = (x \cos \theta + y \sin \theta) \cos \varphi$$

de cette surface d'onde, d'où une différence de marche $\frac{d}{c}$ de l'ébranlement sonore en ce point par rapport à celui en 0. Donc :

$$(32) \quad \dot{u}_0(x, y) = \sin \omega \left[t - \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{c} \cos \varphi \right] = \sin (\omega t - \alpha x - \beta y),$$

avec $\alpha = \beta = 0$ sous incidence normale $\left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right)$, et < 1 dans toute la gamme audible. La force $F(x, y, t)$ sera toujours donnée par (14), et le terme en $-2 \rho \dot{c} u(x, y, t)$ donnera dans $Q_{rs}(t)$ le même résultat $-\left(\frac{\rho c a b}{2} \right) \dot{q}_{rs}$ qu'au § 7; nous ne nous en occuperons donc pas davantage. Le terme $2 \rho \dot{c} u_0(x, y, t)$ donnera :

$$\begin{aligned} A_{rs}(t) &= \int_0^a \int_0^b 2 \rho c \sin (\omega t - \alpha x - \beta y) \sin \frac{r \pi x}{a} \sin \frac{s \pi y}{b} dx dy \\ &= 2 \rho c \sin \omega t \iint \cos (\alpha x + \beta y) \sin \frac{r \pi x}{a} \sin \frac{s \pi y}{b} dx dy \\ &\quad - 2 \rho c \cos \omega t \iint \sin (\alpha x + \beta y) \sin \frac{r \pi x}{a} \sin \frac{s \pi y}{b} dx dy \\ &= 2 \rho c \cdot \frac{rs \pi^2}{ab} \cdot \frac{1}{\left[\left(\frac{r \pi}{a} \right)^2 - \alpha^2 \right] \left[\left(\frac{s \pi}{b} \right)^2 - \beta^2 \right]} \left\{ [1 - \cos (a \alpha + r \pi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos (a \alpha + b \beta + r \pi + s \pi)] \sin \omega t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [\sin (a \alpha + r \pi) + \sin (b \beta + s \pi) - \sin (a \alpha + b \beta + r \pi + s \pi)] \cos \omega t \right\}. \end{aligned}$$

$$(33) \quad A_{rs}(t) = \frac{\left(\frac{8 \, crs \, \pi^2}{ab}\right) \sin(\omega t - \psi_{rs})}{\left[\left(\frac{r \, \pi}{a}\right)^2 - \alpha^2\right] \left[\left(\frac{s \, \pi}{b}\right)^2 - \beta^2\right]} \cdot \left| \sin \frac{a \, \alpha + r \, \pi}{2} \sin \frac{b \, \beta + s \, \pi}{2} \right|$$

$$= P \cdot I \cdot \sin(\omega t - \psi_{rs}),$$

où P ne dépend que de l'ordre de la résonance :

$$(34) \quad P(r, s) = \frac{8 \, \rho \, c}{ab} \cdot \frac{rs \, \pi^2}{\left[\left(\frac{r \, \pi}{a}\right)^2 - \alpha^2\right] \left[\left(\frac{s \, \pi}{b}\right)^2 - \beta^2\right]},$$

et se réduit, sous incidence normale, à :

$$\frac{8 \, \rho \, cab}{rs \, \pi^2}$$

(comparer à l'équation (15) du Chapitre précédent); et où I est un facteur d'incidence, dépendant également de la parité des indices r et s , à savoir :

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{ll} r, s \text{ pairs} \dots\dots\dots & I_1 = \left| \sin \frac{a \, \alpha}{2} \sin \frac{b \, \beta}{2} \right|, \\ r, s \text{ impairs} \dots\dots\dots & I_2 = \left| \cos \frac{a \, \alpha}{2} \cos \frac{b \, \beta}{2} \right|, \\ r \text{ pair, } s \text{ impair} \dots\dots\dots & I_3 = \left| \sin \frac{a \, \alpha}{2} \cos \frac{b \, \beta}{2} \right|, \\ r \text{ impair, } s \text{ pair} \dots\dots\dots & I_4 = \left| \cos \frac{a \, \alpha}{2} \sin \frac{b \, \beta}{2} \right|. \end{array} \right.$$

Enfin ψ est un angle de déphasage facile à calculer, mais dont la valeur ne nous importe pas ici.

Il ne nous reste qu'à appliquer, comme précédemment, les formules (9) et (10); $N' = N$, et il vient aisément :

$$\tau = \sum \left(\frac{PI}{\rho \, cab} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \beta_{rs}^2 \left(\frac{x_{rs}^2 - 1}{x_{rs}} \right)^2},$$

expression qui ne diffère de (19), relative à l'incidence normale, qu'en ce que le facteur $\frac{0,64}{r^2 s^2}$ y est remplacé par $\left(\frac{PI}{\rho \, cab} \right)^2$. Il est naturel de grouper d'abord les termes suivant les quatre aspects (31) de I, soit :

$$\tau = \left[I_1^2 \sum_{\substack{r \text{ pair} \\ s \text{ pair}}} + I_2^2 \sum_{\substack{r \text{ impair} \\ s \text{ impair}}} + I_3^2 \sum_{\substack{r \text{ pair} \\ s \text{ impair}}} + I_4^2 \sum_{\substack{r \text{ impair} \\ s \text{ pair}}} \right] \frac{\left(\frac{P}{\rho \, cab} \right)^2}{1 + \beta^2 \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right)^2}.$$

Mais en vertu d'une remarque faite au § 6, nous avons le droit de considérer comme égales en première approximation les sommes des valeurs de $F(r, s)$ afférentes aux sommets de quadrillages différents, si les mailles de ces quadrillages ont mêmes surfaces : soit donc S l'intégrale commune par quoi nous remplaçons, suivant notre procédé habituel, les différentes sommes ci-dessus :

$$\bar{c} = \frac{1}{4} (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + I_4^2) S.$$

Or :

$$I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 = \sin^2 \frac{a}{2} \alpha \left(\sin^2 \frac{b}{2} \beta + \cos^2 \frac{b}{2} \beta \right) + \cos^2 \frac{a}{2} \alpha \left(\sin^2 \frac{b}{2} \beta + \cos^2 \frac{b}{2} \beta \right) = 1;$$

d'où enfin :

$$\bar{c} = \frac{1}{4} S;$$

c'est l'expression (19), où $\left(\frac{P}{\rho cab} \right)^2$ remplace $\left(\frac{0,8}{rs} \right)^2$ dans les $F(r, s)$ à sommer.

14. — Calcul des sommes intervenant dans la transparence.

Pour écrire $\bar{c}$ en termes finis, il nous reste à évaluer les sommes $\sum_{<\omega} F(r, s)$; $\sum_{>\omega} F(r, s)$, où $F(r, s)$ a la valeur :

$$\left(\frac{P}{\rho cab} \right)^2 = \left[\frac{8 rs \pi^2}{a^2 b^2 \left(\frac{r^2 \pi^2}{a^2} - \alpha^2 \right) \left(\frac{s^2 \pi^2}{b^2} - \beta^2 \right)} \right]^2 = \left[\frac{8 rs \pi^2}{(r^2 \pi^2 - \alpha^2 a^2) (s^2 \pi^2 - \beta^2 b^2)} \right]^2.$$

Faisons les changements de variables :

$$r = aR \cos \psi; \quad s = bR \sin \psi; \quad \text{tg } \psi = t;$$

il vient :

$$\begin{aligned} F &= \frac{0,64}{a^2 b^2} \left[\frac{R^2 \cos \psi \sin \psi}{\left(R^2 \cos^2 \psi - \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right) \left(R^2 \sin^2 \psi - \frac{\beta^2}{\pi^2} \right)} \right] \\ &= \frac{0,64}{a^2 b^2} \left[\frac{R^2 t (1 + t^2)}{\left(R^2 - \frac{\alpha^2}{\pi^2} - \frac{\alpha^2}{\pi^2} t^2 \right) \left(R^2 t^2 - \frac{\beta^2}{\pi^2} - \frac{\beta^2}{\pi^2} t^2 \right)} \right]. \end{aligned}$$

Or $\frac{\alpha^2}{\pi^2} = \omega^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi : \pi^2 c^2$, et $\frac{\beta^2}{\pi^2} = \omega^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi : \pi^2 c^2$ sont au plus de l'ordre de $\frac{\omega^2}{10 c^2}$, soit $\omega^2 \cdot 10^{-10}$, nettement inférieur à 1, alors que R^2 est grand; nous pouvons donc négliger $\frac{\alpha^2}{\pi^2}$ et $\frac{\beta^2}{\pi^2}$ devant R^2 , et écrire :

$$F = \frac{0,64}{a^2 b^2} \cdot \frac{R^4 t^2 (1 + t^2)^2}{\left(R^2 - \frac{\alpha^2}{\pi^2} t^2\right)^2 \left(R^2 t^2 - \frac{\beta^2}{\pi^2}\right)}.$$

Pour avoir la partie principale de la transparence, il nous suffira de calculer $\sum_{\omega} F$, soit :

$$\frac{0,64}{a^2 b^2} \cdot \frac{1}{4} \int_R^{R + \frac{1}{\sqrt{ab}}} R dR \cdot \int_{\frac{1}{bR}}^{aR} dt \cdot \frac{R^4 t^2 (1 + t^2)^2}{\left(R^2 - \frac{\alpha^2}{\pi^2} t^2\right)^2 \left(R^2 t^2 - \frac{\beta^2}{\pi^2}\right)}.$$

Cette intégration ne présente aucune difficulté de principe, puisqu'il s'agit d'une fraction rationnelle, mais les calculs sont assez laborieux dans le cas général. Nous nous bornerons, pour simplifier l'exposé (et sans que d'ailleurs cette particularisation nous fasse rien perdre d'essentiel), au cas où les ondes sonores sont parallèles à l'un des bords de la plaque. Faisons par exemple $\beta = 0$; alors :

$$\begin{aligned} \sum_{\omega} F &= \frac{0,16}{ab} \int_R^{R + \frac{1}{\sqrt{ab}}} R dR \int_{\frac{1}{bR}}^{aR} dt \cdot \frac{1 + t^2}{t^2 \left(R^2 - \frac{\alpha^2}{\pi^2} t^2\right)^2} = \frac{0,08}{ab} \int_{\frac{1}{bR}}^{aR} dt \cdot \frac{1 + t^2}{t^2} \left[\frac{1}{R^2 - \frac{\alpha^2}{\pi^2} t^2} \right]_R^{R + \frac{1}{\sqrt{ab}}} \\ &= \frac{0,08}{ab} \int dt \left[R^{-2} \left(t^{-2} + \frac{R^2 + \frac{\alpha^2}{\pi^2}}{R^2 - \frac{\alpha^2}{\pi^2} t^2} \right) - \left(R + \frac{1}{\sqrt{ab}} \right)^{-2} \left(t^{-2} + \frac{\left(R + \frac{1}{\sqrt{ab}} \right)^2 + \frac{\alpha^2}{\pi^2}}{\left(R + \frac{1}{\sqrt{ab}} \right)^2 - \frac{\alpha^2}{\pi^2} t^2} \right) \right] \\ &= \frac{0,08}{ab} \left[\frac{2}{\sqrt{ab} R^3} (a + b) R + \frac{\alpha^2}{\pi^2} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{R^5} aR \right], \end{aligned}$$

et si nous remplaçons a et b par leur moyenne géométrique $\sqrt{ab}$, comme nous l'avons fait au § 8 :

$$(36) \quad \sum_{\omega} F = \frac{0,32 K}{ab \omega} \left[1 + \frac{\alpha^2 K}{\pi^2 \omega} \right].$$

Ainsi, l'obliquité ajoute au terme principal de la transparence normale une fraction de l'ordre de $K \omega \cos^2 \varphi \cdot (\pi c)^{-2}$ de celle-ci, soit une dizaine de pour cent au maximum. Son effet est donc négligeable.

Ce résultat nous dispense de nous intéresser aux autres cas d'obliquité, dont il n'y a pas de raison de penser que l'effet serait plus grand. Nous aurions pu, d'autre part, conserver les $\frac{\alpha^2}{\pi^2}$, $\frac{\beta^2}{\pi^2}$ devant R^2 ; les calculs auraient eu le même aspect que plus haut, les limites d'intégration en R étant changées; on aboutirait finalement à une expression telle que :

$$\frac{0,04}{a^2 b^2} \left[(a + b) R \cdot \frac{4 \sqrt{ab} + \dots}{R^3 - 2 \frac{\alpha^2}{\pi^2} R - \dots} + \frac{\alpha^2}{\pi^2} \cdot \frac{8 \sqrt{ab} + \dots}{R^5 - 4 \frac{\alpha^2}{\pi^2} R^3 - \dots} aR \right],$$

ce qui ne conduit encore qu'à une correction du second ordre par rapport à la précédente.

Notons enfin en passant ce résultat, qui n'aura pas à être utilisé dans la suite, mais qui peut avoir son intérêt : que la transparence sous incidence rasante (ondes sonores venant lécher une paroi élastique) est sensiblement la même que sous incidence normale, au moins pour les surfaces de l'ordre de grandeur de celles que nous avons envisagées.

THÉORIE DU PANNEAU A DOUBLE PAROI

15. — Position du problème.

Supposons la fenêtre rectangulaire du Chapitre II, de dimensions ab , pratiquée dans un mur indéfini parallèle au front des ondes sonores, fermée non plus par une plaque élastique mince posée sur les bords, mais par deux telles plaques, séparées par une tranche d'air d'épaisseur L . Les vibrations de l'air dans l'onde incidente excitent le mouvement de la plaque avant, laquelle, comprimant la tranche d'air occluse, fait vibrer la plaque arrière; celle-ci rayonne à son tour de l'énergie dans l'espace situé au delà du mur. La transparence du système sera ici, d'après ce qui a été dit au § 4, proportionnelle au rapport de l'énergie cinétique de la plaque AR à l'énergie sonore qui tombe sur la plaque AV.

16. — Équations du mouvement.

Considérons pour commencer deux plaques rectangulaires indépendantes, de dimensions a, b , de masses par unité de surface m et μm , posées sur leurs bords de façon à former deux faces parallèles d'un parallélépipède rectangle $a.b.L$, et prenons des axes $Oxyz$ respectivement parallèles à ces arêtes, O étant un sommet du parallélépipède. Les fonctions normales de l'une et de l'autre plaque sont :

$$f_{rs} = \sin \frac{r \pi x}{a} \sin \frac{s \pi y}{b} \quad (r, s = 1, 2, \dots);$$

il leur correspond des pulsations propres :

$$\omega_{rs} = K \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right) \text{ pour la plaque AV,}$$

$$\omega'_{rs} = K' \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right) \text{ pour la plaque AR.}$$

Les pulsations propres de même ordre (r, s) des deux plaques sont donc dans un rapport constant, qui ne dépend que de E, e, σ et μ en vertu de l'équation écrite au début du § 7; nous poserons :

$$(37) \quad \omega_{rs}^2 = \xi \omega'_{rs}{}^2.$$

Appelons q_{rs} les coordonnées normales de la plaque avant, p_{rs} celles de la plaque arrière; les déplacements d'un point (x, y) de l'une des plaques au cours de petites oscillations seront :

$$(38) \quad u_1 = \sum q_{rs} f_{rs} (\text{pl AV}); \quad u_2 = \sum p_{rs} f_{rs} (\text{pl AR}),$$

et les énergies respectives :

$$(39) \quad \begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m N \sum \dot{q}_{rs}^2; & V_1 &= \frac{1}{2} m N \sum \omega_{rs}^2 q_{rs}^2; \\ T_2 &= \frac{1}{2} m \mu N \sum \dot{p}_{rs}^2; & V_2 &= \frac{1}{2} m \mu N \xi \sum \omega_{rs}^2 p_{rs}^2, \end{aligned}$$

avec d'ailleurs, comme précédemment, $N = \frac{ab}{4}$.

Nous avons évidemment le droit de considérer les deux plaques comme formant un système unique : les degrés de liberté de celui-ci seront alors tous les p et q , les énergies cinétique et potentielle totales seront $T_1 + T_2$, $V_1 + V_2$, et l'on voit que les coordonnées adoptées sont normales pour le système composé, comme elles l'étaient pour ses parties prises isolément.

Fermons maintenant les quatre faces du parallépipède rectangle parallèles à Oz au moyen de cloisons parfaitement rigides : les vibrations des deux plaques se communiqueront à l'air occlus, et réagiront les unes sur les autres. Si nous considérons encore le système complexe formé par les deux plaques et la tranche d'air, cette dernière ne contribuera qu'une fraction négligeable à l'énergie cinétique, sa masse étant négligeable devant celle des plaques; quant à l'énergie potentielle V_{12} contributive, et due à la compression de l'air, elle sera la primitive de la variation de pression considérée comme fonction de la variation de volume : c'est-à-dire qu'elle ne fera intervenir que les déplacements des deux plaques qui limitent la tranche. Ainsi, l'ensemble des coordonnées q et p envisagées ci-dessus suffit toujours à définir l'état du système; mais il va de soi que ces coordonnées ne seront plus normales. Elles seront par contre de la classe (q^*) envisagée au § 3, de sorte que les développements (38) restent valables.

Lorsque le volume v de la tranche d'air varie de δv , la densité ρ de l'air varie de $\delta \rho = \rho \frac{\delta v}{v}$; la pression varie alors de $c^2 \delta \rho = \frac{c^2 \rho}{v} \delta v$, c étant la vitesse du son. L'énergie potentielle correspondante V_{12} sera donnée par :

$$\frac{d}{d(\delta v)} V_{12} = \frac{c^2 \rho}{v} \delta v,$$

d'où :

$$V_{12} = \frac{c^2 \rho}{v} \int \delta v d \delta v = \frac{c^2 \rho}{2v} (\delta v)^2.$$

Or, pour de petites oscillations, les déplacements u ont lieu parallèlement à Oz, un prisme droit élémentaire de base $dx dy$ et de volume originel $L dx dy$ subira donc une variation de volume :

$$d \delta v = (u_1 - u_2) dx dy = \sum_{rs} (q_{rs} - p_{rs}) f_{rs} dx dy,$$

d'où, pour le système tout entier, en intégrant entre $x = 0, x = a, y = 0, y = b$:

$$\begin{aligned} V_{12} &= \int_0^a \int_0^b \frac{c^2 \rho}{2L} \left[\sum (q_{rs} - p_{rs}) f_{rs} \right]^2 dx dy \\ &= \left(\frac{c^2 \rho}{2L} \right) \int_0^a \int_0^b \left[\sum q_{rs}^2 f_{rs}^2 + \sum p_{rs}^2 f_{rs}^2 - 2 \sum (q_{ij} - p_{ij}) (q_{kl} - p_{kl}) f_{ij} f_{kl} \right] dx dy, \end{aligned}$$

et comme les f sont orthogonales, il ne reste que :

$$(40) \quad V_{12} = \frac{c^2 \rho N}{2L} \sum (q_{rs}^2 + p_{rs}^2 - 2 q_{rs} p_{rs}).$$

Les énergies cinétique et potentielle du système complexe plaque AV — tranche d'air — plaque AR sont donc $T_1 + T_2$ et $V_1 + V_2 + V_{12}$. On voit que les termes rectangulaires introduits par le couplage présentent une particularité remarquable : c'est celle de ne faire intervenir que des couples de coordonnées p, q de mêmes indices. Chacune des équations de Lagrange en q_{mn} ne comporte donc que les deux inconnues q_{mn}, p_{mn} , et l'équation de Lagrange relative à p_{mn} comporte les mêmes deux inconnues; de plus, celles-ci ne se retrouvent dans aucune des autres équations du mouvement. Ainsi, le système des équations du mouvement (à double infinité d'inconnues) se décompose en une infinité de systèmes de deux équations à deux inconnues, grâce à cette particularité du couplage et peut, par suite, être aisément résolu.

Le système d'équations d'ordre r, s s'écrit :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{rs} + \left(\omega_{rs}^2 + \frac{c^2 \rho}{Lm} \right) q_{rs} - \frac{c^2 \rho}{Lm} p_{rs} &= \frac{Q_{rs}}{mN}, \\ -\frac{c^2 \rho}{Lm} q_{rs} + \mu \ddot{p}_{rs} + \left(\mu \xi \omega_{rs}^2 + \frac{c^2 \rho}{Lm} \right) p_{rs} &= \frac{P_{rs}}{mN}. \end{aligned}$$

Pour le calcul des forces généralisées Q_{rs} , il n'y a rien à changer à ce qui a été dit au Chapitre III; quant aux forces P_{rs} appliquées à la plaque arrière, elles sont nulles. Donc :

$$\begin{aligned} Q_{rs} &= \frac{2 \rho cab}{\pi^2 rs} (1 - \cos r \pi) (1 - \cos s \pi) \sin \omega t - \frac{1}{2} \rho cab \dot{q}_{rs} \\ &= mN \frac{Q}{rs} \sin \omega t - mN \frac{2 \rho c}{m} \dot{q}_{rs}, \end{aligned}$$

où $Q = \frac{32 \rho c}{\pi^2 m}$ si r et s sont tous deux impairs, et $Q = 0$ dans les autres cas. Seules les valeurs impaires de r et s nous intéressent donc pour l'étude des vibrations forcées de pulsation ω .

Finalement, nos équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned} (41) \quad a_1 q_{rs} - b_1 p_{rs} &= \frac{Q}{rs} \sin \omega t, \\ -b_1 q_{rs} + a_2 p_{rs} &= 0, \end{aligned}$$

où les a sont des opérateurs $a_1 = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\rho c}{m} \frac{d}{dt} + \omega_{rs}^2 + b_1$; $a_2 = \frac{\mu d^2}{dt^2} + \mu \xi \omega_{rs}^2 + b_1$; et $b_1 = \frac{c^2 \rho}{Lm}$ est le coefficient de couplage, le même pour tous les ordres r, s . Ces équations sont identiques à celles qui régissent de nombreux problèmes connus, notamment celui de deux circuits électriques couplés par capacité (1). Il nous faudra pourtant les discuter à nouveau, nos conditions ne s'accommodant bien ni des simplifications, ni même des points de vue généralement adoptés en électricité.

Pour résoudre les (41), nous poserons, suivant un procédé classique :

$$p = |p| e^{i(\omega t - \varphi)}; \quad q = |q| e^{i(\omega t - \varphi')},$$

remplacerons $\sin \omega t$ par $e^{i\omega t}$, au second membre; il vient alors :

$$(42) \quad \left(b_1 + \omega_{rs}^2 - \omega^2 + i \frac{2\rho c}{m} \right) |q_{rs}| - b_1 |p_{rs}| = \frac{Q}{rs},$$

$$- b_1 |q_{rs}| + [\mu (\xi \omega_{rs}^2 - \omega^2) + b_1] |p_{rs}| = 0.$$

17. — Pulsations propres du système couplé.

D'après un théorème général, nous savons (2) qu'elles doivent séparer les pulsations propres ω_{rs} , $\xi \omega_{rs}$ du système découplé. La vérification de cette propriété est aisée dans notre cas : l'équation déterminante s'écrit :

$$(43) \quad (b_1 + \omega_{rs}^2 - \omega^2) (b_1 + \mu \xi \omega_{rs}^2 - \mu \omega^2) - b_1^2 = 0;$$

car non seulement le terme dissipatif n'interviendrait que pour une correction du second ordre, mais encore celui qui figure dans (41) provient de la force extérieure, et n'entre pas en ligne de compte dans la détermination d'un régime libre (3). Posons $\frac{\omega^2}{\omega_{rs}^2} = x_{rs}$ (nous laisserons d'ailleurs tomber les indices de x chaque fois qu'une confusion ne sera pas à craindre), et encore :

$$(44) \quad \mu \omega_{rs}^4 G(x) = \mu \omega_{rs}^4 \left[(1 - x)(\xi - x) + \frac{c^2 \rho}{Lm \mu \omega_{rs}^2} (1 + \mu \xi - x - \mu x) \right].$$

Avec ces notations, l'équation déterminante est :

$$G(x) = (X' - x)(X'' - x) = 0,$$

(1) Voir, par ex. : ROCARD, *Dynamique générale des Vibrations*, § 53; et une discussion plus confuse, mais se rapprochant sur certains points de nos conditions, dans TIMOSHENKO, *Théorie des Vibrations*, § 41.

(2) Cf. LORD RAYLEIGH, *Theory of Sound* (2nd ed.), § 92 a. — La fréquence propre du « vibreur de couplage » est ici infinie (couplage à inertie négligeable); les nouvelles racines sont donc décalées des anciennes vers les fréquences croissantes :

$$(1 \text{ ou } \xi) < X' < (\xi \text{ ou } 1) < X''.$$

(3) Il y a bien aussi une dissipation interne, que nous négligeons, ayant vérifié par l'expérience que son effet était minime. Ce n'est pas ce terme négligé qui rend pratiquement finis les maxima calculés comme ∞ , mais le fait qu'on sort du domaine des amplitudes infiniment petites où notre théorie était valable.

et l'on voit bien que :

$$G(1) G(\xi) = - \left(\frac{c^2 \rho}{L m \mu \omega_{rs}^2} \right)^2 \mu (\xi - 1)^2 < 0, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Nous savons que l'un des termes qui interviendront dans les modules de p et q sera le carré de (44); il est donc utile de voir dès à présent comment varie $G^2(x)$ en fonction de son argument (*fig. 6*) : or cette fonction part, x croissant à partir de 0, d'une valeur constante et finie $\left[\frac{c^2 \rho}{L m \mu \omega_{rs}^2} \cdot (1 + \mu \xi) + \xi \right]^2$, passe par un minimum nul pour $x = X'$, par un maximum fini pour $x = \frac{X' + X''}{2}$, de nouveau par un minimum nul pour

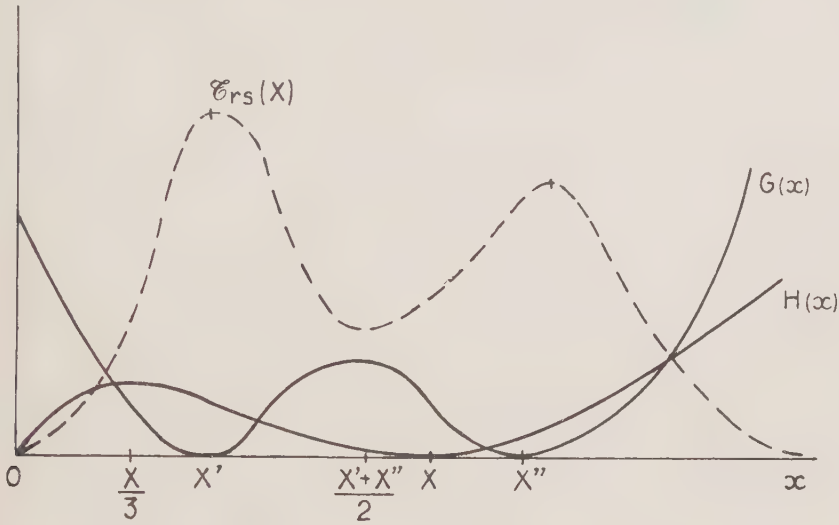


Fig. 6. — Variation de $G_{rs}(x)$, $H_{rs}(x)$ et $\mathcal{G}_{rs}$ en fonction du désaccord x_{rs}

$x = X'$, puis enfin croît indéfiniment comme x^4 . Il peut d'ailleurs se trouver que les deux minima soient confondus, et qu'ainsi le maximum disparaisse; ce cas ne présente aucun caractère essentiel distinct, et ne mérite pas de discussion séparée, comme on pourra s'en rendre compte par la suite.

18. — Transparence du système pour des couplages lâches.

La transparence du système s'écrit, en vertu de (10) :

$$\mathcal{G} = \sum \mathcal{G}_{rs} = \sum \frac{1}{4} |p_{rs}|^2 \omega^2,$$

soit ici :

$$(45) \quad \mathcal{G} = \sum \left(\frac{Q c^2 \rho}{2 L m \mu} \right)^2 \frac{1}{\omega_{rs}^6 r^2 s^2} \cdot \frac{x}{G^2(x) + \frac{4 \rho^2 c^2}{m^2 \omega_{rs}^2} H(x)},$$

avec :

$$H(x) = x(X - x)^2 \\ = x \left[\xi + \frac{c^2 \rho}{Lm \mu \omega_{rs}^2} - x \right]^2.$$

Lorsque x croît de 0 à ∞ , H croît de 0 à $\frac{4X^3}{27}$, valeur atteinte pour $x = \frac{X}{3}$, puis décroît jusqu'à 0 pour $x = X$, et croît ensuite au delà de toute limite comme x^2 . Il s'ensuit que le terme en H de (45) dont le coefficient, égal à $\frac{6400}{m^2 \omega_{rs}^2}$, est pratiquement toujours inférieur à 1, est négligeable partout sauf au voisinage des zéros de G ; nous pourrions donc, sauf dans ce voisinage, confondre $\mathcal{C}_{rs}$ avec :

$$(46) \quad \mathcal{C}'_{rs} = \left(\frac{Qc^2 \rho}{2 Lm \mu} \right)^2 \cdot \frac{1}{\omega_{rs}^6 r^2 s^2} \cdot \frac{x}{G^2(x)}.$$

Au contraire, aux zéros de G , nous aurons, au lieu des pointes de résonance théoriquement infinies, les maxima estompés :

$$(47) \quad \mathcal{C}''_{rs} = \left(\frac{Qc}{4 L \mu} \right)^2 \cdot \frac{1}{\omega_{rs}^4 r^2 s^2} \cdot \frac{1}{(X - x)^2},$$

avec $x = X'$ ou $x = X''$.

Nous allons maintenant chercher une expression approchée de la transparence en termes finis, en procédant comme au § 8. Nous partagerons donc la somme (45) en trois groupes, à savoir :

$$\mathcal{C} = \sum_{<\omega} \mathcal{C}_{rs} + \sum_{\omega} \mathcal{C}_{rs} + \sum_{>\omega} \mathcal{C}_{rs};$$

dans le premier, x est grand, donc (écartant le cas de couplages très serrés) G^2 se réduit à x^4 , et il nous faut calculer :

$$\left(\frac{Qc^2 \rho}{2 Lm \mu} \right)^2 \cdot \sum_{<\omega} \frac{1}{r^2 s^2 \omega_{rs}^6 x^3} = \left(\frac{Qc^2 \rho}{2 Lm \mu} \right)^2 \omega^{-6} \sum_{<\omega} \frac{1}{r^2 s^2}.$$

Nous avons vu au § 8 que $\sum_{\infty} \frac{1}{r^2 s^2} = \frac{1}{0,64}$, la somme étant étendue à toutes les valeurs impaire de r et de s depuis 1 jusqu'à l' ∞ ; mais il est aisé de vérifier que les $\frac{8}{10}$ de cette valeur finale sont atteintes dès le terme qui suit le fondamental, et les $\frac{9}{10}$ dès le sixième terme; pour peu que ω soit supérieur à ω_{rs} , nous pourrions donc prendre $\frac{1}{0,64}$ pour valeur de notre $\sum$, soit :

$$(48) \quad \sum_{<\omega} \mathcal{C}_{rs} = \frac{1}{0,64} \left(\frac{Qc^2 \rho}{2 Lm \mu} \right)^2 \omega^{-6}.$$

Pour les termes résonnants (47), ω_{rs} est par hypothèse sensiblement égal à ω , et tous les facteurs autres que $(rs)^{-2}$ sortent du signe $\sum$; et la somme de $(rs)^{-2}$ dans la bande de résonance ayant été calculée au § 8, nous pouvons écrire directement :

$$(49) \quad \sum_{\omega} \tau_{rs} = \left(\frac{Qc}{4L\mu} \right)^2 \left[(\xi - 1) \omega^2 + \frac{\rho c^2}{Lm\mu} \right]^{-2} \cdot \frac{K}{2ab\omega}.$$

Enfin lorsque x est petit G^2 se réduit à son terme constant, dont la partie principale est ξ^2 si ω_{rs} est grand; de sorte que :

$$\sum_{>\omega} \tau_{rs} = \left(\frac{Qc^2\rho}{2Lm\mu} \right)^2 \sum_{>\omega} \frac{1}{r^2 s^2 \omega_{rs}^6} \cdot \frac{\omega^2}{\xi^2 \omega_{rs}^2} = \left(\frac{Qc^2\rho}{2Lm\mu} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\xi} \right)^2 \sum_{>\omega} \Phi(r, s),$$

avec $\Phi(r, s) = (rs \omega_{rs}^4)^{-2}$. La méthode du Chapitre II donne immédiatement :

$$\sum_{>\omega} \Phi(r, s) = \frac{ab}{4} \int_{\frac{1}{bR}}^{\infty} \frac{dR}{a^2 b^2 K^8 R^{19}} \int_{\frac{1}{bR}}^{aR} \frac{1+t^2}{t^2} dt = \frac{1}{36} \left(\frac{K}{ab} \right)^{\frac{1}{2}} \omega^{-\frac{17}{2}},$$

d'où :

$$(50) \quad \sum_{>\omega} \tau_{rs} = \left(\frac{Qc^2\rho}{2Lm\mu} \right)^2 \cdot \left(\frac{K}{ab} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{36\xi^2} \omega^{-\frac{13}{2}}.$$

Nous pouvons grouper (48) et (50) en écrivant :

$$\left(\frac{Qc^2\rho}{2Lm\mu} \right)^2 \omega^{-6} \left[\frac{1}{0,64} + \frac{1}{72\xi^2} \sqrt{\frac{K}{ab\omega}} \right];$$

on se rend compte alors de la petitesse du second terme du crochet devant le premier, dans tous les cas qui se présentent dans la pratique $\left(\frac{K}{ab\omega} \right.$ de l'ordre de 10^{-3}); il reste donc pratiquement :

$$(51) \quad \tau = \left(\frac{Qc}{2L\mu} \right)^2 \left[\frac{c^2\rho^2}{0,64m^2} \cdot \frac{1}{\omega^6} + \frac{K}{8ab} \cdot \frac{1}{\left[(\xi - 1) \omega^2 + \frac{\rho c^2}{Lm\mu} \right]^2 \omega} \right].$$

L'allure de cette fonction de ω dépend essentiellement de la valeur du paramètre $\xi - 1$. Tout d'abord, si $\xi = 1$, et que L ne soit pas trop grand, on trouve un terme principal $\frac{0,32K}{ab\omega}$, comme pour la plaque avant seule (Chapitre III), avec cependant une correction plus faible (en ω^{-6} au lieu qu'elle était en ω^{-2} pour la plaque seule). Lorsque $\xi - 1 > 0$ (plaque AR la plus rigide des deux), l'allure de la transparence est encore en gros la même, le terme principal décroissant de façon monotone lorsque la pulsation croît, mais plus vite que pour deux plaques identiques; lorsque la paroi arrière est très rigide, la loi tend à être en ω^{-5} , donc transparence très inférieure à celle de la paroi avant

seule : résultat qui était qualitativement intuitif. Enfin si le couplage est infiniment lâche ($L \propto$), la transparence est nulle dans tous les cas, comme on devait s'y attendre.

Le comportement du système est plus intéressant lorsque $\xi - 1 < 0$ (plaque AR moins rigide que la plaque AV) : en effet, $\mathcal{C}$ passe alors par un maximum, que la formule (51) donne comme $\propto$. Naturellement, on sort alors du domaine de validité de toutes nos équations; ce qu'il faut retenir, comme dans le cas simple de l'oscillateur à un degré de liberté, c'est qu'il y a une pointe assez aiguë, analogue à une « résonance globale » du système. Il est aisé de voir que celle-ci se produira pour une pulsation Ω :

$$(52) \quad \Omega^2 = \frac{\rho c^2}{(1 - \xi) L m \mu}.$$

Avant d'atteindre cette résonance, le deuxième terme de (51) passera par un minimum égal à :

$$(53) \quad \left(\frac{K}{2ab} \right) \sqrt{5(1 - \xi) \frac{L m \mu}{\rho c^2}} \quad \text{pour} \quad \omega = \frac{\Omega}{\sqrt{5}};$$

suivant les valeurs des paramètres, ce minimum pourra se trouver dans la bande acoustique et la résonance en dehors de la bande : la paroi double est alors, en quelque sorte, antirésonante; ou bien, au contraire, le minimum sera dans la région infra-sonore, et le seul effet sensible sera celui de la résonance; ou enfin les deux extrema pourront être observés dans la bande audible.

19. — Couplages très serrés.

Reprenons (45), en faisant L suffisamment petit pour que les coefficients en L^{-1} fassent prédominer les termes qu'il affectent; alors :

$$G(x) \approx \frac{c^2 \rho}{L m \mu \omega_{rs}^2} (1 + \mu \xi - x - \mu x); \quad H(x) \approx x \left(\frac{c^2 \rho}{L m \mu \omega_{rs}^2} \right)^2;$$

L disparaît donc de l'expression de $\mathcal{C}$, qui devient :

$$\mathcal{C}_{rs} \approx \left(\frac{16 \rho c}{\pi^2 m} \right)^2 \cdot \frac{1}{r^2 s^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2 \rho c}{m} \right)^2 + \left[(1 + \mu \xi) \omega_{rs}^2 - (1 + \mu) \omega^2 \right]^2 \omega^{-2}},$$

ou encore :

$$(54) \quad \mathcal{C} \approx \sum \frac{0,64}{r^2 s^2} \cdot \frac{1}{1 + \left[\frac{m(1 + \mu)}{2 \rho c} \right]^2 \left(\frac{1 + \mu \xi}{1 + \mu} \omega_{rs}^2 \right) \left(\frac{1 - \frac{\omega^2}{\frac{1 + \mu \xi}{1 + \mu} \omega_{rs}^2}}{\omega} \right)^2 \frac{1 + \mu \xi}{1 + \mu} \omega_{rs}^2}.$$

En comparant avec (19), on constate que c'est là une expression de même forme. Le système couplé considéré, où le couplage est infiniment serré, c'est-à-dire qui consiste en une plaque formée de deux couches juxtaposées de natures différentes, équivaut donc pour la transparence à une plaque homogène dont la masse unitaire serait la somme des masses unitaires des deux couches composantes, soit $m(1 + \mu)$, et dont les pulsations propres seraient :

$$(55) \quad \omega_{rs}^* = \sqrt{\frac{1 + \mu \xi}{1 + \mu}} \omega_{rs}.$$

Mais le coefficient K, dans l'expression de la pulsation propre d'une plaque, est proportionnel à $\sqrt{\frac{Ec^3}{m}}$ (E module de Young, e épaisseur de la plaque, m masse par unité de surface) : notre système de deux plaques juxtaposées, à les supposer de même nature et de même épaisseur, équivaut donc à une plaque homogène d'épaisseur $e' = e \sqrt[3]{2}$, et non $2e$.

Remarquons que l'hypothèse du couplage infiniment serré équivaut, du point de vue de la dynamique, à une liaison; le coefficient de V_{12} devenant infini, il faut qu'il affecte une expression égale à zéro, d'où une condition de liaison. Dans le problème que nous venons de traiter, et où $V_{12} = C \cdot \sum (q_{rs} - p_{rs})^2$, il vient $p_{rs} = q_{rs}$. Les expressions de T et V nous donnent alors une équation de Lagrange en q_{rs} , d'où l'on tire bien la valeur (55) de la pulsation propre :

$$2T = mN \sum \dot{q}_{rs}^2 + m\mu N \sum \dot{q}_{rs}^2; \quad 2V = mN \sum \omega_{rs}^2 q_{rs}^2 + m\mu N \sum \xi \omega_{rs}^2 q_{rs}^2;$$

d'où :

$$m(1 + \mu) N \ddot{q}_{rs} + m(1 + \mu \xi) N \omega_{rs}^2 q_{rs} = 0,$$

et la pulsation propre :

$$\Omega^2 = \frac{1 + \mu \xi}{1 + \mu} \omega_{rs}^2.$$

CHAPITRE VI

EXTENSION AUX SYSTÈMES A COUPLAGE MONOVALENT

20. — Définition.

Le problème du Chapitre précédent nous a fait connaître un système dynamique jouissant d'une propriété remarquable : constitué par deux parties S_1 et S_2 , et exprimé au moyen de l'ensemble des coordonnées normales pour S_1 et des coordonnées normales pour S_2 , soit q_m^1 et q_m^2 , chacune de ses équations du mouvement fait intervenir une coordonnée prise dans chacun des deux tableaux, et une seule. Il est évidemment possible de ranger les q_i^j dans un ordre tel que les deux variables figurant dans une même équation aient même indice inférieur; alors les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned} L_m^{12}(q_m^1, q_m^2) &= Q_m^{12}, \\ \dots\dots\dots &\dots\dots\dots \\ L_m^{21}(q_m^1, q_m^2) &= Q_m^{21} \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \\ \dots\dots\dots &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et peuvent se décomposer en une infinité de systèmes de deux équations à deux inconnues (ayant même indice inférieur). Tout se passe comme si chaque vibration normale de S_1 était couplée à une vibration normale de S_2 , et à une seule. Empruntant une terminologie chimique dont la signification ici est évidente, nous dirons que le couplage considéré est « monovalent » (cette appellation nous a été suggérée par M. ROCARD).

21. — Conditions de possibilité d'un couplage monovalent.

Soit un système S composé de deux parties S_1 et S_2 , et que nous exprimerons au moyen de variables de la classe (q^*) définie au § 3, à savoir $q_1^1, q_2^1, \dots$, normales pour S_1 , et $q_1^2, q_2^2, \dots$, normales pour S_2 . Au cours des petites oscillations de S , tout point $(x_1^k, x_2^k, \dots)$ faisant partie de S_k ($k = 1, 2$) subira des déplacements :

$$u_k(x^k; t) = \sum q_m^k(t) f_m^k(x^k).$$

L'énergie de S se composera d'éléments qui dépendront de l'état de chacun de ses points, et d'autres éléments dépendant à la fois de l'état d'un point de S_1 et de celui d'un point de S_2 : en effet, l'hypothèse des petites oscillations, qui limite les termes d'énergie au

second degré, ne permet pas qu'il y en ait qui dépendent de l'état de plus de deux points; et le choix des q élimine d'avance tous les termes rectangulaires qui dépendraient de deux coordonnées du même sous-espace.

Aux termes de couplage dont on vient de parler, chaque élément dx^1 de S_1 et chaque élément dx^2 de S_2 contribuera :

$$dT_{12} = A(x^1; x^2) F(u_1, u_2) dx^1 dx^2; \quad dV_{12} = B(x^1; x^2) G(u_1, u_2) dx^1 dx^2,$$

où F et G sont des fonctions qui, pour les petites oscillations, se réduisent à des formes quadratiques $\sum F_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j$, $\sum G_{ij} u_i u_j$ ($i, j = 1, 2$), tandis que, dans les mêmes hypothèses, A et B sont des coefficients indépendants des déplacements u_1 et u_2 . Nous aurons donc, en utilisant le développement des u en fonction des q , et en intégrant dans tout le domaine S composé du domaine S_1 dans le sous-espace des x^1 et du domaine S_2 dans le sous-espace des x^2 :

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{12} = \sum (\dot{q}_m^1)^2 \iint A(x^1; x^2) [f_m^1(x^1)]^2 dx^1 dx^2 + \sum (\dot{q}_m^2)^2 \iint A(x^1; x^2) [f_m^2(x^2)]^2 dx^1 dx^2 \\ \quad + \sum \dot{q}_{m_1}^1 \dot{q}_{m_2}^2 \iint A(x^1; x^2) f_{m_1}^1(x^1) f_{m_2}^2(x^2) dx^1 dx^2, \\ V_{12} = \sum (q_m^1)^2 \iint B(x^1; x^2) [f_m^1(x^1)]^2 dx^1 dx^2 + \sum (q_m^2)^2 \iint B(x^1; x^2) [f_m^2(x^2)]^2 dx^1 dx^2 \\ \quad + \sum q_{m_1}^1 q_{m_2}^2 \iint B(x^1; x^2) f_{m_1}^1(x^1) f_{m_2}^2(x^2) dx^1 dx^2. \end{array} \right.$$

Dans le cas où une homologie peut être établie entre les points de S_1 et de S_2 , et où, par suite, certains points appartenant aux deux domaines peuvent s'exprimer par les mêmes x , il faut remplacer les intégrales multiples ci-dessus, pour ces couples de points, par des intégrales d'ordre de multiplicité moindre, telles que :

$$\int A(x) f_{m_1}^1(x) f_{m_2}^2(x) dx; \quad \int B(x) f_{m_1}^1(x) f_{m_2}^2(x) dx.$$

Pour que le couplage soit monovalent, il faut, d'après notre définition, que les intégrales des termes rectangulaires ne soient différentes de zéro que pour $m_1 = m_2$.

1° Dans le domaine où l'on a $x^1 \neq x^2$, considérons la suite :

$$F_{ij}(x^1; x^2) = f_i^1(x^1) \cdot f_j^2(x^2);$$

en vertu d'un théorème connu (1), cette suite est complète et orthogonale dans l'espace des x^1, x^2 , et les conditions de monovalence :

$$\int A F_{ij} dx^1 dx^2 = K_{ij} \delta_{ij}; \quad \int B F_{ij} dx^1 dx^2 = K_{ij} \delta_{ij},$$

signifient que si l'on développe A et B en séries de F_{ij} , les coefficients des termes $i \neq j$ seront nuls. Donc :

$$(57) \quad A = \sum a_{ij} f_i^1(x^1) f_j^2(x^2); \quad B = \sum b_{ij} f_i^1(x^1) f_j^2(x^2).$$

(1) Cf. par ex. : COURANT-HILBERT, *Method. d. math. Physik*, t. 1, ch. II, § 1,6.

2° Dans le domaine où le couplage s'exerce entre points homologues ($x^1 = x^2 = x$), la condition de monovalence :

$$\int A(x) f_i^1(x) f_j^2(x) dx = K_{ij} \delta_{ij},$$

signifie que les $A f_i^1$ sont orthogonales aux f_j^2 ; de même, les $B f_i^1$ sont orthogonales aux f_j^2 ; ces conditions ne peuvent être réalisées que si A et B sont des constantes absolues, et les f^1 proportionnelles aux f^2 de même indice :

$$(57') \quad A = \text{const}; \quad B = \text{const}; \quad f_i^1(x) = K_i f_i^2(x).$$

Ainsi, pour que le couplage soit monovalent, s'il s'exerce entre points non homologues, il faut que son intensité soit dans une relation donnée avec les fonctions propres, et en particulier cette intensité ne saurait être constante; s'il s'exerce entre points homologues, par contre, l'intensité est nécessairement constante, et les fonctions propres des deux systèmes doivent ne différer que par des facteurs constants.

Nous avons rencontré, au Chapitre précédent, un exemple de couplage constant par points homologues : c'est celui constitué par une tranche d'air comprimée. En vertu du résultat que l'on vient d'établir, ce couplage ne peut être monovalent si les panneaux limitant la tranche n'ont pas les mêmes fonctions propres (membranes de formes différentes, ou de même forme mais fixées différemment sur leur pourtour). En revanche, la monovalence peut être réalisée avec deux panneaux de natures différentes, dès lors qu'ils admettent les mêmes fonctions propres : nous allons en voir un exemple dans le paragraphe suivant.

22. — Paroi double plaque et membrane.

1° Remplaçons la plaque arrière du § 16 par une membrane tendue : les fonctions propres restent $\sin \frac{r \pi x}{a} \sin \frac{s \pi y}{b}$; les pulsations propres sont :

$$\omega'_{rs} = K' \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{d'où} \quad \xi = \frac{\omega'_{rs}}{\omega_{rs}} = \frac{K'^2}{K \omega_{rs}} = \frac{k}{\omega_{rs}} :$$

ξ est désormais une fonction de r, s . Il est aisé de se rendre compte du fait que ceci n'entraîne rigoureusement aucune modification aux calculs du Chapitre V, jusqu'au moment où nous procédons à la sommation des différents termes ζ_{rs} ; on notera d'ailleurs que la variation de ξ est une décroissance assez rapide à partir de $\frac{k}{\omega_{11}}$, qui en constitue par conséquent une borne supérieure.

Il n'y a encore rien à changer au calcul de $\sum_{<\omega}$, où ξ n'intervient pas; pour $\sum_{>\omega}$, la fonction G^2 se réduit à :

$$\left[k \omega_{rs}^{-1} + (1 + \mu k \omega_{rs}^{-1}) \left(\frac{c^2 \rho}{L m \mu} \right) \omega_{rs}^{-2} \right]^2,$$

dont la partie principale est $k^2 \omega_{rs}^{-2}$ lorsque ω_{rs} est grand, ce qui est bien le cas pour tous les termes entrant dans cette somme. Donc :

$$\sum_{>\omega} \tilde{v}_{rs} = \left(\frac{Qc^2 \rho}{2 L m \mu} \right)^2 \sum_{>\omega} \frac{1}{r^2 s^2 \omega_{rs}^6} \cdot \frac{\omega^2}{k^2} = \left(\frac{Qc^2 \rho}{2 L m \mu k} \right)^2 \omega^2 \sum_{>\omega} \Phi(r, s),$$

avec $\Phi(r, s) = \frac{1}{r^2 s^2 \omega_{rs}^6}$. Notre procédé de sommation approchée donne :

$$\begin{aligned} \sum_{>\omega} \Phi(r, s) &\neq \frac{ab}{4} \int_R^\infty \int_{\arctg(\frac{1}{bR})}^{\arctg(aR)} \frac{R dR d\theta}{R^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cdot K^6 R^{12} \cdot a^2 b^2} \\ &= \frac{1}{4 ab K^6} \int_R^\infty \frac{dR}{R^{15}} \int_{\frac{1}{bR}}^{aR} \frac{1+t^2}{t^2} dt \neq \frac{1}{28} \left(\frac{K}{ab} \right)^{\frac{1}{2}} \omega^{-\frac{13}{2}}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\sum_{>\omega} \tilde{v}_{rs} = \left(\frac{Qc^2 \rho}{2 L m \mu} \right)^2 \cdot \left(\frac{K}{ab} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{28 k^2} \cdot \omega^{-\frac{9}{2}}.$$

Cette fois-ci, contrairement à ce qui se passait pour deux plaques, cette somme partielle sera en général plus importante que $\sum_{<\omega} \tilde{v}_{rs}$.

De même, pour les termes quasi résonnants, on aura :

$$\begin{aligned} \sum_{\omega} \tilde{v}_{rs} &= \left(\frac{Qc}{4 L \mu} \right)^2 \sum_{\omega} \frac{1}{r^2 s^2 \left(k \omega_{rs} - \omega^2 + \frac{\rho c^2}{L m \mu} \right)} \\ &= \left(\frac{Qc}{4 L \mu} \right)^2 \left(-\omega^2 + k \omega + \frac{\rho c^2}{L m \mu} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{K}{2 ab \omega} \right). \end{aligned}$$

On aura toujours, pour cette somme partielle, l'allure générale du cas $\xi < 1$ de la discussion du § 18, le trinôme qui figure ci-dessus au dénominateur ayant toujours une racine positive en ω , donc acceptable; mais, surtout aux aiguës, $\sum_{>\omega}$ qui est en $\omega^{-\frac{9}{2}}$ pourra l'emporter sur $\sum_{\omega}$ qui est en ω^{-5} , ou au moins être du même ordre de grandeur; de sorte que l'effet de « résonance globale » dû à $\sum_{\omega}$ sera en général fortement estompé.

2° Supposons maintenant la double paroi constituée par une membrane à l'avant, une plaque à l'arrière : nous aurons $\xi = k \omega_{rs}$; la somme $\sum_{<\omega} \tilde{v}_{rs}$ reste encore inchangée, mais :

$$\sum_{>\omega} \tilde{v}_{rs} = \left(\frac{Qc^2 \rho}{2 L m \mu} \right)^2 \sum_{>\omega} \frac{1}{r^2 s^2 \omega_{rs}^6} \cdot \frac{\omega^2}{k^2 \omega_{rs}^4} = \left(\frac{Qc^2 \rho}{2 L m \mu} \right)^2 \frac{\omega^2}{k^2} \sum_{>\omega} \Phi(r, s),$$

avec $\Phi(r, s) = (r^2 s^2 \omega_{rs}^{10})^{-1}$ et $\omega_{rs}^2 = \left(\frac{K^2}{ab}\right) R^2$ d'où, comme précédemment :

$$\begin{aligned} \sum_{>\omega} \Phi(r, s) &= \frac{1}{8} \int_R^\infty \int_{\arccotgr R}^{\arctgr R} R \, dR \, d\theta \left[R^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cdot \left(\frac{K^2}{ab}\right)^5 R^{10} \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{ab}{K^2}\right)^5 \int_R^\infty \frac{dR}{R^{13}} \int_{\frac{1}{R}}^R \frac{1+t^2}{t^2} dt \cdot \frac{\left(\frac{ab}{K^2}\right)^5}{56} \cdot R^{-13} \\ &= \frac{1}{56 \left(\frac{ab}{K^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \omega^{-13}}. \end{aligned}$$

$\sum_{>\omega} \bar{v}_{rs}$ varie donc comme la puissance — 11 de ω , et peut être négligée devant $\sum_{<\omega}$, qui est en ω^{-6} et est affectée d'un coefficient numérique du même ordre de grandeur que celui de $\sum_{>\omega}$.

Pour $\sum_{\omega} \bar{v}_{rs}$, on a de même :

$$\sum_{\omega} \bar{v}_{rs} = \left(\frac{Qc}{4L\mu}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(-\omega^2 + k\omega^3 + \frac{\rho c^2}{Lm\mu}\right)^2} \cdot \frac{K^2}{2ab\omega^2}.$$

Le dernier facteur est différent de celui que nous avons toujours rencontré jusqu'ici dans le calcul de cette somme, car $\sum_{\omega} \frac{1}{r^2 s^2}$ vaut toujours approximativement $\frac{1}{2R^2}$ comme aux §§ 8 et 18, mais pour une membrane $R^2 = \frac{ab\omega^2}{K^2}$, ainsi que nous l'avons écrit un peu plus haut, et non $\frac{ab\omega}{K}$ comme pour la plaque.

On voit que la somme des termes résonnants a, en gros, le même caractère que pour deux plaques, la moins rigide étant à l'arrière, ou que pour une plaque et une membrane (début du présent paragraphe). La « résonance globale » a lieu ici pour :

$$7k\omega^3 - 5\omega^2 + \left(\frac{\rho c^2}{Lm\mu}\right) = 0;$$

en dehors du voisinage de cette pointe, la variation de $\sum_{\omega}$ est en ω^{-8} , de sorte que $\sum_{<\omega}$ l'emporte. En définitive, même allure générale que tout à l'heure, avec une transparence en général numériquement plus faible.

23. — Polyvalence de tout couplage restreint à une variété - Exemple.

Qu'un couplage ne saurait être monovalent, s'il ne s'étend pas à la totalité de S_1 et à la totalité de S_2 , quand bien même il satisfait à toutes les conditions (57) dans la variété où il s'exerce, c'est ce qui résulte directement de la démonstration du théorème

du § 21. En effet, si A (ou B) est une constante non nulle dans une variété s de S_1 , et nulle dans le reste de S_1 , les produits intérieurs des fonctions propres qui figurent dans les expressions des énergies sont étendus à s , et ne jouissent plus de la propriété d'orthogonalité :

$$(f_i, f_j) = \delta_{ij},$$

qui n'est vraie qu'étendue à tout le domaine S_1 . Et d'ailleurs on peut dire, à juste titre, que la condition $A = \text{const } \delta_{x'x''}$ n'est pas remplie, mais qu'on a en son lieu

$$A = F(x^1) \delta_{x'x''},$$

où F est une fonction discontinue, égale à une certaine constante dans s et nulle en dehors de s . On objectera peut-être que la distinction est artificielle, que nous faisons ici entre un couplage « total dans S_1 » et « étendu seulement à la variété s de S_1 » : car ne pourrions-nous nommer S_1 cette variété seule ? Mais c'est qu'alors les q_{rs} ne seraient plus les coordonnées normales de S_1 , ni les $f_{rs}^1 = f_{rs}^2$ ses fonctions propres et, en passant aux nouvelles coordonnées normales et aux nouvelles fonctions propres, on s'apercevrait que toute apparence de couplage monovalent est désormais abolie, les (57) n'étant pas invariantes pour un tel changement de coordonnées. On voit ici, comme nous l'avons fait observer ailleurs (1), que si le choix des coordonnées modifie l'aspect du couplage, lequel semble dès lors ne pas avoir de signification intrinsèque, il n'en existe pas moins un système de coordonnées privilégié, dans lequel la forme des équations rend évident un caractère physique propre au système, caché dans tout autre mode de représentation.

Nous allons illustrer ce qui précède par un exemple qui importe en lui-même à notre recherche : celui de la liaison d'une plaque avec un raidisseur considéré comme une verge. Soit donc, pour simplifier, une verge de masse unitaire M et de spectre $\Omega_r = Ar^2$, posée le long de la droite $y = \frac{b}{2}$, et liée (par rivure, soudure, etc.) à la plaque. Les fonctions propres $f_r = \sin \frac{r \pi x}{a}$ de la verge coïncident avec celles de la plaque dans la variété x de l'espace x, y . Soient p_r les coordonnées normales correspondantes, $u_2(x; t)$ les déplacements de la verge, $u_1(x, y; t)$ ceux de la plaque ; la liaison imposée se traduira par la relation :

$$u_1\left(x, \frac{b}{2}; t\right) = \sum_{rs} q_{rs} \sin \frac{r \pi x}{a} \sin \frac{s \pi}{2} = u_2(x; t) = \sum_r p_r \sin \frac{r \pi x}{a},$$

d'où :

$$p_r = \sum_s q_{rs} \sin \frac{s \pi}{2}.$$

Les énergies cinétique et potentielle du système sont donc :

$$T = \frac{1}{2} m \frac{ab}{2} \sum \dot{q}_{rs}^2 + \frac{1}{2} M \frac{a}{2} \sum \dot{q}_{rs}^2 + M \frac{a}{2} \sum \dot{q}_{ri} \dot{q}_{rj} \sin \frac{i \pi}{2} \sin \frac{j \pi}{2},$$

$$V = \frac{1}{2} m \frac{ab}{2} \sum \omega_{rs}^2 q_{rs}^2 + \frac{1}{2} M \frac{a}{2} \sum \Omega_r^2 q_{rs}^2 + M \frac{a}{2} \sum \Omega_r^2 q_{ri} q_{rj} \sin \frac{i \pi}{2} \sin \frac{j \pi}{2},$$

(1) VOGEL, 1946 b.

d'où l'équation de Lagrange en q_{rs} :

$$\left(\frac{mab}{4} + \frac{Ma}{2}\right) \ddot{q}_{rs} + \frac{Ma}{2} \sin \frac{s\pi}{2} \sum_i \ddot{q}_{ri} \sin \frac{i\pi}{2} + \left(\frac{mab}{4} \omega_{rs}^2 + \frac{Ma}{2} \Omega_r^2\right) q_{rs} + \frac{Ma}{2} \Omega_r^2 \sin \frac{s\pi}{2} \sum_i q_{ri} \sin \frac{i\pi}{2} = Q_{rs}.$$

q_{rs} est donc couplée à toutes les coordonnées ayant même premier indice qu'elle.

Nous pouvons écrire cela de façon un peu différente, en utilisant l'équation de liaison :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_r - \sum_i q_{ri} \sin \frac{i\pi}{2} = 0 \\ \frac{mab}{4} \ddot{q}_{rs} + \frac{mab}{4} \omega_{rs}^2 q_{rs} + \frac{Ma}{2} \sin \frac{s\pi}{2} \ddot{p}_r + \frac{Ma}{2} \Omega_r^2 \sin \frac{s\pi}{2} p_r = Q_{rs}. \end{array} \right.$$

Sous cette forme, on voit mieux le caractère particulier du couplage, qui est ce qu'on pourrait appeler une monovalence unidirectionnelle : q n'est couplée qu'à une seule des p ; mais chaque p est couplée à toutes les q ayant même indice r qu'elle.

La matrice du système d'équations précédent (et il y a autant de pareils systèmes que de valeurs différentes de l'indice r) a la forme de la matrice de la plaque seule, bordée d'éléments qui ne dépendent que de la verge :

1	$-\sin \frac{\pi}{2}$	$-\sin \frac{3\pi}{2}$	$-\sin \frac{5\pi}{2}$	
$\frac{Ma}{2} \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega_r^2\right)$	$\frac{mab}{4} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_{r1}^2\right)$	0	0	
$\frac{Ma}{2} \sin \frac{3\pi}{2} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega_r^2\right)$	0	$\frac{mab}{4} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_{r3}^2\right)$	0	
$\frac{Ma}{2} \sin \frac{5\pi}{2} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega_r^2\right)$	0	0	$\frac{mab}{4} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_{r5}^2\right)$	
.....				

Il est aisé de vérifier que les théorèmes généraux rappelés au Chapitre V s'appliquent ici : séparation des nouvelles pulsations propres par les ω_{rs} , etc. Par contre, une étude plus approfondie de cette catégorie de problèmes soulève certaines difficultés que nous n'avons pas pu, jusqu'ici, lever de manière satisfaisante.

PANNEAUX ÉLASTIQUES A REVÊTEMENTS POREUX

24. — Représentation schématique du corps acoustiquement poreux.

Les résultats que nous avons obtenus dans ce qui précède nous permettent d'entreprendre l'examen du cas plus complexe d'une plaque élastique encollée d'un revêtement de la nature du feutre, de la laine de verre, etc., arrangement couramment utilisé pour « insonoriser » une enceinte fermée. Mais il faut pour cela, avant tout, adopter une image simple du « corps poreux acoustique », qui en retienne les caractéristiques essentielles communes aux différents matériaux techniques sous-entendus, comme le fait le « corps élastique » de la théorie pour les solides habituels. Le schéma le plus connu est celui de Lord RAYLEIGH (1), suivant lequel le corps est constitué par un solide percé de canalicules normaux à sa surface; les molécules d'air, animées de vitesse par l'onde sonore, viennent frapper les parties pleines, et alors tout se passe comme pour un solide élastique; ou bien elles pénètrent dans les canalicules, où leur énergie est partiellement absorbée par viscosité et effet thermique, dans une mesure que permet de prévoir la théorie des tuyaux acoustiques étroits. On conçoit, *a priori*, que les deux paramètres qui conditionnent le comportement du corps poreux, selon RAYLEIGH, soient la porosité (rapport des pleins et des creux) et le diamètre des canalicules. Ce schéma a été discuté et retouché par divers auteurs, notamment par ZWIKKER et ses collaborateurs (2), qui ont introduit en particulier une correction pour tenir compte des cavernes intérieures et de l'obliquité éventuelle des canalicules. L'expérience montre que la théorie ainsi complétée ne rend pas trop mal compte de l'allure générale des phénomènes. Mais l'accord n'est qu'assez grossier pour bien des matériaux; de plus, si une théorie physique a pour rôle essentiel de permettre une prévision correcte des résultats observables, encore faut-il, par ailleurs, qu'elle satisfasse l'esprit et cadre avec nos connaissances dans les domaines connexes, sous peine de n'être qu'une recette empirique. Or il est suffisamment clair que les matériaux techniques dont il s'agit ici, composés de fibres solides plus ou moins longues agglomérées à peu près au hasard (à telles enseignes que certains de ces produits sont quasi-isotropes, ce que ne saurait être le corps poreux de Rayleigh), ne peuvent être sérieusement assimilés à des assemblages de canalicules, même inclinés ou renflés intérieurement; et cependant il est certain que l'air circule d'une manière ou d'une autre entre ces fibres, et que c'est cette circulation qui véhicule principalement le son. Les théories récentes qui assimilent cet air occlus à un fluide jouissant d'une constante

(1) *Theory of Sound*, 2nd ed., § 351.

(2) ZWIKKER, 1932; KOSTEN et ZWIKKER, 1941; ZWIKKER, VAN DER ELJK et KOSTEN, 1941.

de propagation et d'une impédance acoustique spécifiques, toutes deux complexes (1), paraissent ouvrir une voie très intéressante à des recherches plus approfondies. Nous croyons toutefois préférable de ne pas trop nous engager, pour l'instant, et de laisser dans une certaine indétermination la nature profonde ou physique du phénomène, puisqu'aussi bien c'est à un point de vue plutôt mécanicien que nous nous sommes constamment placé. Nous admettrons donc simplement, ce qui n'est inconsistant avec aucune des explications rappelées, que le matériau de porosité géométrique moyenne P (densité des fibres écrasées et réduites à l'état de corps homogène $= (1 - P)$. densité de l'échantillon poreux) se comporte, pour une fraction $(1 - P)$, comme un solide d'élasticité négligeable, transmettant intégralement les vibrations à son support, et pour une fraction P comme un milieu dans lequel l'énergie se transmet avec un affaiblissement A . Quant aux observables de l'expérience, ce sont les deux grandeurs dont il a été question dans l'Introduction : la transparence $\mathcal{C}$ et l'absorption à la réflexion $\mathcal{A}$. Nous allons donc chercher à exprimer la transparence de notre panneau composite, connaissant (par expérience, puisqu'il s'agit d'une grandeur directement observable; ou par la théorie, si nous en choisissons une) le coefficient $\mathcal{A}$.

25. — Transparence d'une plaque encollée de matériau poreux.

Considérons une plaque élastique mince identique à celle étudiée au Chapitre III (épaisseur e , masse par unité de surface m , dimensions a . b , spectre ω_{rs}) et collons-y une couche de matériau poreux, de porosité P et de masse par unité de surface μm , d'élasticité négligeable ($\xi \neq 0$). Deux cas pourroient se présenter :

a) *Le côté encollé est à l'arrière.* — La force généralisée appliquée est (15), comme au Chapitre III; elle met en vibration une double paroi à couplage infiniment serré, avec, de plus, $\xi = 0$. L'équation du mouvement est (§ 19, *in fine*) :

$$\ddot{q}_{rs} + \frac{2 \rho c}{m (1 + \mu)} \dot{q}_{rs} + \frac{\omega_{rs}^2}{1 + \mu} q_{rs} = \frac{32 \rho c}{\pi^2 r s m (1 + \mu)} \sin \omega t.$$

qui revient à (17) si l'on remplace, dans cette dernière, m par $m (1 + \mu)$ et ω_{rs}^2 par $\frac{\omega_{rs}^2}{(1 + \mu)}$. Dans le calcul de la transparence (19), les termes deviennent donc, pour $x \gg 1$:

$$\frac{0,64 \cdot 4 \rho^2 c^2}{r^2 s^2 m^2 \omega^2} \cdot \frac{1}{(1 + \mu)^2} \quad \text{et pour } x \ll 1 : \quad \frac{0,64 \cdot 4 \rho^2 c^2}{r^2 s^2 m^2 \omega_{rs}^4};$$

de sorte que la formule (26'') aux bornes de la transparence se trouve remplacée par :

$$(58) \quad \frac{0,32 K}{ab \omega} < \bar{v}_1 < \frac{0,32 K}{ab \omega} + \frac{4 \rho^2 c^2}{m^2 \omega^2 (1 + \mu)^2}.$$

Plus la surcharge poreuse sera importante, et plus $\bar{v}_1$ se rapprochera de sa borne inférieure : le premier effet du revêtement est de diminuer le « terme de Davis » de (26'').

(1) MONNA, 1938; MORSE et BOLT, 1944; SCOTT, 1946; SCOTT, 1946 a.

Telle est donc la proportion d'énergie acoustique incidente qui se retrouve sur la face arrière de la plaque élastique. Que devient-elle ? Les parties pleines du revêtement suivent exactement les vibrations de leur support, et les communiquent à l'air ambiant; une fraction $(1 - P)$ de l'énergie ci-dessus est donc intégralement utilisée sous forme sonore; la partie P , au contraire, communiquée à l'air occlus et par celui-ci à l'air extérieur, est affaiblie dans une proportion A . La transparence totale du système est donc :

$$(59) \quad \bar{c} = (1 - P) \bar{c}_1 + AP \bar{c}_1 = \bar{c}_1 - (1 - A) P \bar{c}_1.$$

L'affaiblissement A étant compris entre 0 et 1, $(1 - P) \bar{c}_1 < \bar{c} < \bar{c}_1$:

$$(60') \quad \frac{0,32 K (1 - P)}{ab \omega} < \bar{c} < \frac{0,32 K}{ab \omega} + \frac{4 \rho^2 c^2}{m^2 \omega^2} (1 + \mu)^2.$$

Les deux bornes de la transparence sont finalement abaissées, l'une par l'effet de la porosité géométrique, l'autre par celui de la surcharge. On remarquera que l'impédance spécifique du matériau ne figure pas dans notre formule, mais elle n'a effectivement aucun rôle à y jouer, même si l'on adopte la manière de voir de SCOTT : car l'énergie transmise à l'air extérieur dépend de la résistance acoustique de celui-ci et de la vitesse qui lui est communiquée, qui est la vitesse de l'air occlus. Le rapport entre vitesse et pression dans l'air occlus ne nous intéresse donc pas ici.

b) *Côté encollé à l'avant.* — Si W est l'énergie incidente, et que la porosité soit nulle, le panneau se comporte comme une plaque élastique surchargée, de transparence $\bar{c}_1$, c'est-à-dire qu'il réfléchit l'énergie $(1 - \bar{c}_1) W$. C'est à ce taux que sont réfléchies les molécules qui frappent les parties pleines de la couche poreuse, soit :

$$(1 - P) (1 - \bar{c}_1) W.$$

Une quantité d'énergie PW pénètre, par contre, dans la couche poreuse, et y subit un affaiblissement A , de sorte que c'est une énergie APW qui excite les vibrations de la plaque élastique. Si $\bar{c}_2$ est la transparence de celle-ci, l'air extérieur à l'arrière du panneau reçoit une énergie $AP \bar{c}_2 W$, cependant que $AP (1 - \bar{c}_2) W$ est réfléchi dans la couche poreuse, et en ressort par l'avant, affaibli dans le rapport A , ce qui le réduit à $A^2 P (1 - \bar{c}_2) W$. Si nous résumons ce bilan énergétique, pour une énergie incidente W , on a l'énergie réfléchie :

$$(61) \quad (1 - A) W = (1 - P) (1 - \bar{c}_1) W + A^2 P (1 - \bar{c}_2) W,$$

et l'énergie transmise :

$$\bar{c} W = AP \bar{c}_2 W;$$

nous en tirons la valeur de l'affaiblissement A par :

$$(62) \quad A^2 = \frac{1 - A + (P - 1) (1 - \bar{c}_1)}{P (1 - \bar{c}_2)},$$

et par suite :

$$\bar{c} = P \bar{c}_2 \sqrt{\frac{1 - A + (P - 1) (1 - \bar{c}_1)}{P (1 - \bar{c}_2)}}.$$

Les transparences $\bar{\epsilon}_1$ et $\bar{\epsilon}_2$ ne sont pas rigoureusement les mêmes, car les vibrations de la plaque sont en fait excitées par la pression $\rho' \dot{c} \dot{u}_0$ de l'air occlus (ρ' impédance acoustique du matériau), et non par $\dot{c} \dot{u}_0$ comme au Chapitre III et comme pour $\bar{\epsilon}_1$: de sorte que les termes en ω^{-1} des deux expressions sont identiques, mais que les « termes de Davis » sont entre eux comme $|\rho'|^2$ est à ρ^2 . Cette différence devait être signalée, mais pratiquement elle est négligeable dans les $(1 - \bar{\epsilon}_i)$, puisque les transparences sont en général de l'ordre de 10^{-2} au plus. On aura donc sensiblement :

$$(63) \quad \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_1 \sqrt{P(1 - \lambda) + P(P - 1)} = \bar{\epsilon}_1 \sqrt{P(P - \lambda)},$$

expression qui est bien toujours réelle, puisque, d'après (61), $\lambda \neq P(1 - A^2)$ est compris entre 0 et P.

Appliquons (58); il vient :

$$(64) \quad \frac{0,32 K \sqrt{P(P - \lambda)}}{ab \omega} < \bar{\epsilon} < \frac{0,32 K \sqrt{P(P - \lambda)}}{ab \omega} + \frac{4 \rho^2 c^2}{m^2 \omega^2} \cdot \frac{\sqrt{P(P - \lambda)}}{(1 + \mu)^2}.$$

D'ailleurs, $0 \leq \sqrt{P(P - \lambda)} \leq P$: l'utilisation de (64) au lieu de (60) abaisse la borne supérieure de $\bar{\epsilon}$ dans le rapport de $\sqrt{P(P - \lambda)}$ à 1 et élève, au contraire, la borne inférieure, pourvu que $\sqrt{P(P - \lambda)}$ soit supérieur à $1 - P$, c'est-à-dire que $P > \frac{1}{2 - \lambda} > \frac{1}{2}$. La valeur vraie de $\bar{\epsilon}$ est donc serrée de plus près.

Pour comparer les cas *a*) et *b*), portons (62), avec la simplification légitime $\bar{\epsilon}_1 \neq \bar{\epsilon}_2 \ll 1$, dans (59) : la formule analogue à (63) est :

$$(63') \quad \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_1 \left[1 - P \left(1 - \sqrt{\frac{P - \lambda}{P}} \right) \right] = \bar{\epsilon}_1 \left[\sqrt{P(P - \lambda)} + (1 - P) \right] :$$

le cas *a*) correspond donc à une transparence un peu plus forte; pour rendre la paroi aussi absorbante que possible à la transmission, mieux vaut disposer la couche poreuse sur la face qui reçoit l'impact des ondes sonores (c'est d'ailleurs la disposition contraire qui est exigée par la considération de la réflexion à l'intérieur de l'enceinte : contradiction qui n'a pas grande importance, car la différence entre les deux transparences (63) et (63') sera, en général, faible).

PLAQUE SIMPLE EN DEUXIÈME APPROXIMATION

26. — Amplitudes de vibration finies.

Toutes les équations écrites dans les Chapitres précédents supposent les oscillations petites, et plus précisément négligent les termes d'énergie de degré supérieur au deuxième par rapport aux variables de Lagrange. Or on obtient, en partant de cette hypothèse classique, des expressions telles que (9), qui prévoient, pour les variables en question, de très fortes amplitudes au voisinage de la résonance d'un mode propre; et de plus, lors du calcul de la transparence, nous avons fait remarquer que pour des pulsations forcées suffisamment élevées, il y aura toujours résonance ou quasi-résonance sur un ou plusieurs modes propres, et nous en avons tenu compte dans le calcul. Il semblerait donc que nous n'appliquions la théorie des petites oscillations que pour aboutir à des régimes où elle n'est pas valable. Qu'il ne s'agisse pourtant pas là d'un jeu mathématique vain, mais d'une première approximation tout à fait acceptable, de nombreux problèmes analogues nous le font heureusement prévoir, et nous montrerons plus loin que l'expérience le confirme dans les cas mêmes que nous avons traités. Il n'en reste pas moins vrai qu'il serait important d'obtenir une deuxième approximation : c'est ce que nous allons tenter de faire pour le problème fondamental de la plaque simple sous incidence normale, moyennant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices.

Ces hypothèses sont les suivantes :

1° Les déformations de la plaque restent suffisamment petites pour pouvoir être caractérisées en tout point (x, y) par un déplacement $u(x, y; t)$ normal au plan de repos xOy ;

2° Une seule $q_{r_0 s_0} = q_0$ des variables de Lagrange est voisine de la résonance à la pulsation considérée ω . Nous savons que ceci n'est pas exact; mais nous sommes, d'autre part, porté à supposer que cette hypothèse ne nous écartera pas trop des résultats corrects, pour ce qui concerne la transparence, puisque le terme de $\bar{\epsilon}$ (en première approximation), dû aux modes résonnants, est $\frac{0,32 K}{ab \omega}$, alors que si le mode $(r, 1)$ ou $(1, s)$ résonnait tout seul, son apport serait $\frac{0,61}{r^2}$ ou $\frac{0,61}{s^2}$, c'est-à-dire $\frac{0,61 K}{ab \omega}$;

3° Tout en étant grand devant les autres q_{rs} , q_0 reste suffisamment petit pour que son carré soit de l'ordre de q_{rs} .

A l'approximation ainsi définie, il n'y aura lieu de retenir, dans les équations du mouvement, que des termes d'ordres non supérieurs à celui de q_{rs} , ce qui conduit à

prévoir dans les expressions de T et de V, outre les termes quadratiques, des termes en $q_0^2 \dot{q}_0^2$, $q_0 \dot{q}_0 \dot{q}_{rs}$, et en q_0^3 , $q_0^2 q_{rs}$. Les énergies s'écrivent donc :

$$(65) \quad \begin{cases} T = \frac{1}{2} mN \sum \dot{q}_{rs}^2 + \frac{2}{3} mN \alpha_0 q_0 \dot{q}_0^2 + mN q_0 \dot{q}_0 \sum \alpha_{rs} \dot{q}_{rs}, \\ V = \frac{1}{2} mN \sum \omega_{rs}^2 q_{rs}^2 + mN q_0^2 \sum \gamma_{rs} q_{rs} + \frac{1}{3} mN \gamma_0 q_0^3. \end{cases}$$

La force généralisée étant toujours donnée par (15), les équations du mouvement sont :

$$(66) \quad \begin{cases} \ddot{q}_{rs} + \frac{2 \rho c}{m} \dot{q}_{rs} + \omega_{rs}^2 q_{rs} = \frac{32 \rho c}{\pi^2 r s m} \sin \omega t - (\alpha_{rs} \dot{q}_0^2 + \alpha_{rs} q_0 \ddot{q}_0 + \gamma_{rs} q_0^2), \\ \ddot{q}_0 + \frac{2 \rho c}{m} \dot{q}_0 + \omega^2 q_0 = \frac{32 \rho c}{\pi^2 r_0 s_0 m} \sin \omega t - \left(\frac{2}{3} \alpha_0 \dot{q}_0^2 + \frac{4}{3} \alpha_0 q_0 \ddot{q}_0 + \gamma_0 q_0^2 \right) - \dots \end{cases}$$

On voit s'introduire un mode assez particulier de couplage, qui paraît d'ailleurs intuitivement raisonnable dans nos hypothèses : q_0 , qui est grand, influe sur les q_{rs} ; ceux-ci sont sans réaction sur lui.

La méthode classique de résolution des (66) en deuxième approximation, qui consiste à remplacer q_0 au second membre par sa première approximation (16) :

$$q_0^{(1)} = \frac{1,6}{r_0 s_0 \omega} \cos \omega t,$$

donne sans difficulté :

$$(67) \quad q_{rs} = -\frac{\gamma_{rs}}{2 \omega^2 \omega_{rs}^2} + q_{rs}^{(1)} - \left(\alpha_{rs} + \frac{\gamma_{rs}}{2 \omega^2} \right) \cdot \frac{2,56}{r_0^2 s_0^2} \cdot \frac{\cos (2 \omega t - \varphi_{rs})}{\sqrt{\frac{16 \rho^2 c^2 \omega^2}{m^2} + (\omega_{rs}^2 - 4 \omega^2)^2}},$$

avec $\omega_{rs} = \omega$ pour q_0 . Nous retrouvons le résultat expérimental bien connu : à la résonance, les vibrations de la plaque ont lieu autour d'une déformée moyenne qui ne coïncide pas avec le plan de repos; et aux vibrations à l'unisson s'ajoute une composante à l'octave supérieur.

Du point de vue de la transparence, aux termes $\mathfrak{C}^{(1)}$ calculés au Chapitre III s'ajoute la correction :

$$\mathfrak{C}^{(2)} = \frac{4 \omega^2}{4} \sum \left(\alpha_{rs} - \frac{\gamma_{rs}}{2 \omega^2} \right)^2 \frac{6,56}{r_0^4 s_0^4} \cdot \frac{1}{\frac{16 \rho^2 c^2 \omega^2}{m^2} + (\omega_{rs}^2 - 4 \omega^2)^2};$$

ou encore, avec les notations du § 7 :

$$(68) \quad \mathfrak{C}^{(2)} = \frac{0,41 m^2}{\rho^2 c^2 r_0^4 s_0^4} \sum \left(\alpha_{rs} - \frac{\gamma_{rs}}{2 \omega^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \beta_{rs}^2 \left(\frac{1 - 4 x^2}{x} \right)^2}.$$

Il faut voir maintenant s'il est possible d'évaluer, au moins grossièrement, les coefficients α , γ que l'on avait posés *a priori*. Voyons d'abord pour l'énergie cinétique : nous avons postulé que $\frac{1}{2} m \iint \dot{u}^2 dx dy$ avait la forme :

$$\frac{1}{2} m \left[\sum \dot{q}_{rs}^2 \iint f_{rs}^2 dx dy + \frac{4}{3} \alpha_0 q_0 \dot{q}_0^2 \iint f_0^2 dx dy + q_0 \dot{q}_0 \sum \alpha_{rs} \dot{q}_{rs} \iint f_{rs}^2 dx dy \right];$$

il faut pour cela que $\dot{u}$ soit de la forme :

$$\dot{u} = \sum \dot{q}_{rs} f_{rs} + A q_0 \dot{q}_0,$$

avec les conditions :

$$\iint A^2 dx dy = \frac{4}{3} \alpha_0 \iint f_0^2 dx dy; \quad \iint A f_{rs} dx dy = \frac{1}{2} \alpha_{rs} \iint f_{rs}^2 dx dy.$$

La deuxième de ces conditions montre que α_{rs} est le coefficient de f_{rs} dans le développement de $A(x, y)$ en série de f ; la première donne alors :

$$\iint A^2 dx dy = \sum \frac{\alpha_{rs}^2}{4} N = \frac{4}{3} \alpha_0 N,$$

d'où :

$$\alpha_0 = \frac{3}{16} \sum \alpha_{rs}^2.$$

L'expression de u est donc :

$$u = \sum q_{rs} f_{rs} + \frac{1}{2} q_0^2 \sum \frac{\alpha_{rs}}{2} f_{rs} = \sum \left(q_{rs} + \frac{1}{4} \alpha_{rs} q_0^2 \right) f_{rs} = \sum \bar{q}_{rs} f_{rs}.$$

Attendu que $\sum q_{rs} f_{rs}$ est une première approximation, à laquelle la deuxième ne doit apporter qu'une légère correction, et que q_0^2 est de l'ordre de q_{rs} , il faut que les $\frac{1}{4} \alpha_{rs}$ soient petits devant l'unité. Donc :

$$\alpha_{rs} \ll 4.$$

Passons à l'énergie potentielle. Celle-ci est toujours, en fonction des composantes du tenseur déformation (lesquelles se réduisent ici à e_{xx} , e_{yy} et e_{xy} en vertu de l'hypothèse 1°) :

$$V = \iiint \left[\frac{2\mu + \lambda}{8} (e_{xx}^2 + e_{yy}^2) + \frac{\lambda}{4} e_{xx} e_{yy} + \frac{\mu}{2} e_{xy}^2 \right] dx dy dz,$$

$$\neq \frac{\mu}{8} \iiint (3 e_{xx}^2 + 3 e_{yy}^2 + 2 e_{xx} e_{yy} + 4 e_{xy}^2) dx dy dz,$$

en admettant la relation $\lambda = \mu$, à quoi conduisent les conditions de Cauchy (cela revient, on le sait, à adopter pour le coefficient $\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ de Poisson la valeur $\frac{1}{4}$, très voisine

de ce que donne l'expérience). Mais pour que des termes du 3^e degré apparaissent dans $V(q)$, il nous faudra prendre, au lieu des approximations classiques :

$$e_{xx} = 2z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad e_{yy} = 2z \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad e_{xy} = 2z \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

les expressions complètes (1) :

$$\begin{aligned} e_{xx} &= z \left[2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial xy} \right)^2 \right], \\ e_{yy} &= z \left[2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial xy} \right)^2 \right], \\ e_{xy} &= z \left[2 \frac{\partial^2 u}{\partial xy} + \frac{\partial^2 u}{\partial xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial xy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]. \end{aligned}$$

L'intégration en z devra se faire sur toute l'épaisseur e de la plaque, de part et d'autre de la fibre neutre, soit de $z = -\frac{e}{2}$ à $z = +\frac{e}{2}$; il vient alors, en posant $\frac{\mu e^3}{12} = D$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{D}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial xy} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] dx dy \\ &+ \frac{D}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^3 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^3 + 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial xy} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] dx dy + \dots \end{aligned}$$

En substituant $\sum \bar{q}_{rs} \cdot \frac{\partial^2 f_{rs}}{\partial i \partial j}$ pour $\frac{\partial^2 u}{\partial i \partial j}$, et en ne conservant que les termes en q_{rs} , $q_0^2 q_{rs}$ et q_0^3 qui nous sont utiles, il vient, compte tenu des expressions de ω_{rs}^2 et de $\omega_0^2 = \omega^2$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} mN \sum \omega_{rs}^2 q_{rs}^2 + \frac{1}{4} mN \sum \alpha_{rs} \omega_{rs}^2 q_0^2 q_{rs} + \frac{1}{4} mN \alpha_0 q_0^3 \omega^2 \\ &- \sum q_0^2 q_{rs} \cdot \frac{3\pi^6 D}{2} \left[\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right) \left(\frac{r_0^2}{a^2} + \frac{s_0^2}{b^2} \right)^2 - \frac{r_0^2 (9r^2 s_0^2 + 8r_0^2 s^2)}{9a^4 b^2} - \frac{s_0^2 (9s^2 r_0^2 + 8s_0^2 r^2)}{9a^2 b^4} \right] \frac{ab}{rs \pi^2} \\ &- q_0^3 \cdot \frac{\pi^6 D}{2} \left[\left(\frac{r_0^2}{a^2} + \frac{s_0^2}{b^2} \right)^3 + \frac{r_0^4 s_0^2}{a^4 b^2} + \frac{r_0^2 s_0^4}{a^2 b^4} \right] \frac{ab}{r_0 s_0 \pi^2} + \dots \end{aligned}$$

Or, nous avons :

$$m \omega_{rs}^2 = D \pi^4 \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right) \quad \text{et} \quad N = \frac{ab}{4};$$

par suite, la partie principale du coefficient de $q_0^2 q_{rs}$ est :

$$- \frac{6 mN \omega_{rs}^2 \left(\frac{r_0^2}{a^2} + \frac{s_0^2}{b^2} \right)^2}{rs \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right)} = - 6 mN \omega_{rs}^2 \cdot R(r, s, r_0, s_0);$$

(1) Cf. par ex. : L. BRILLOUIN, *Les tenseurs en Mécanique et en Elasticité* (Paris, 1938), p. 220.

R est de l'ordre de $\frac{1}{rs}$ lorsque ω_{rs} est de l'ordre de ω , et négligeable lorsque $\omega_{rs} \gg \omega$. De même, le coefficient de q_0^3 est :

$$-2 mN \omega^2 \left(\frac{r_0^2}{a_0^2} + \frac{s_0^2}{b^2} + \dots \right) = -2 mN \omega^2 R' (r_0, s_0),$$

où R' , de degré 0 en r_0, s_0 , est de l'ordre de l'unité. On voit du même coup que ces deux coefficients sont grands devant les α_{rs} , de sorte que :

$$V \neq \frac{1}{2} mN \sum \omega_{rs}^2 q_{rs}^2 - 6 mN \sum \omega_{rs}^2 R q_0^2 q_{rs} - 2 mN \omega^2 q_0^3,$$

et que l'on peut prendre comme ordres de grandeur $\gamma_{rs} = -6 \omega_{rs}^2 R$; $\gamma_0 = -6 \omega^2$. La transparence additionnelle devient alors, par (68) :

$$\bar{\tau}(2) = \frac{3,7 m^2}{r_0^4 s_0^4 \rho^2 c^2} \sum_{\leq \omega} \frac{R^2}{x^4 \left[1 + \beta_{rs}^2 \left(\frac{1 - 4x^2}{x} \right) \right]^2}.$$

Le terme résonnant $\omega_{rs} = \omega$ apporte une contribution :

$$\frac{3,7 m^2}{r_0^4 s_0^4 \rho^2 c^2} \cdot \frac{R'^2}{9 \beta_0^2} = \frac{6,6}{r_0^4 s_0^4 \omega^2};$$

les autres termes ($\omega_{rs} < \omega$) contribuent approximativement :

$$\frac{3,7 m^2}{r_0^4 s_0^4 \rho^2 c^2} \sum_{< \omega} \frac{R^2(r, s)}{\beta_{rs}^2 x^6} \neq \frac{59}{r_0^4 s_0^4} \sum_{< \omega} \frac{R^2 \omega_{rs}^4}{\omega^6} < \frac{59}{r_0^4 s_0^4 \omega^2} \sum_{< \omega} R^2.$$

Mais $R^2 \neq \frac{1}{r^2 s^2}$, et nous avons vu (§ 8) que $\sum_{< \omega} \frac{1}{r^2 s^2} \neq \frac{1}{0,64}$; d'où :

$$\bar{\tau}(2) < \frac{66}{r_0^4 s_0^4 \omega^2}.$$

Puisqu'aussi bien c'est une borne supérieure de la correction que nous cherchons, plaçons-nous dans l'hypothèse où $r_0 s_0$ est le plus petit possible, soit $r_0 = 1$ ou $s_0 = 1$, $r_0^2 s_0^2 \neq \frac{ab \omega}{K}$. Alors :

$$(69) \quad \bar{\tau}(2) < \frac{66 K^2}{a^2 b^2 \omega^4}.$$

Pour que cette correction ne fût pas négligeable devant $\bar{\tau}(1)$, il faudrait avoir $\frac{66 K^2}{a^2 b^2 \omega^4}$ de l'ordre de $\frac{4 \rho^2 c^2}{m^2 \omega^2}$, ou encore $\frac{4 K}{ab \omega}$ de l'ordre de $\frac{\rho c}{m}$. Ce ne sera jamais le cas pour des pulsations de l'ordre de 10^3 à 10^4 au moins comme celles que nous envisageons; il y faudrait des valeurs de m très élevées, incompatibles avec l'hypothèse des plaques minces. Nous pouvons donc conclure que la valeur de $\bar{\tau}$, calculée au Chapitre III, n'est pas modifiée en deuxième approximation (définie comme ci-dessus).

27. — Vibrations d'une plaque travaillant au flambage.

Dans le cas des plaques constituant une carlingue d'avion, auquel nous avons fait allusion dans l'Introduction, non seulement les supports des mailles ou « raidisseurs » sont imparfaitement rigides, mais encore ils travaillent en vol, et sont le siège de vibrations s'exerçant principalement ou en partie dans le plan de la coque. Les mailles sont donc soumises, en plus de l'action, envisagée jusqu'ici, des ondes sonores, à des contraintes latérales de même origine, et vraisemblablement de même fréquence; ou du moins peut-on supposer que certaines fréquences importantes du spectre sonore se retrouvent dans le spectre des vibrations du réseau maillé. Sans avoir la prétention de résoudre le problème pratique extrêmement complexe dont nous venons de signaler l'existence, nous sommes amené cependant à envisager au moins un cas théorique simple pour nous orienter à cet égard : ce sera celui d'une plaque soumise au champ sonore normal, et de plus à des forces parallèles à Ox , dues à de faibles vibrations des supports, vibrations au cours desquelles les nœuds du réseau maillé restent fixes. Nous pourrons donc exprimer les forces en question par :

$$(70) \quad P = \sum_k P_k \sin \frac{k \pi y}{b} \cos \omega t;$$

leur amplitude sera elle-même faible (sans que nous puissions la préciser).

Les énergies de la plaque sont toujours :

$$T = \frac{mab}{4} \sum \dot{q}_{rs}^2; \quad V = \frac{mab}{4} \sum \omega_{rs}^2 q_{rs}^2;$$

à la force généralisée Q_{rs} calculée au § 7 vient s'ajouter une force P_{rs} , qui est la dérivée par rapport à q_{rs} du travail des (70). Or nous connaissons l'expression de celui-ci, à savoir (1) :

$$W = \frac{1}{2} \iint P \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx dy;$$

d'où :

$$\begin{aligned} P_{rs} &= \frac{\partial}{\partial q_{rs}} \frac{1}{2} \iint \left(\sum_k P_k \sin \frac{k \pi y}{b} \cos \omega t \right) \left(\sum_{rs} \frac{r^2 \pi^2}{a^2} q_{rs} \sin \frac{r \pi x}{a} \sin \frac{s \pi y}{b} \right)^2 dx dy \\ &= \cos \omega t \cdot \frac{\pi^4 r^4}{a^4} \sum_k P_k q_{rs} \iint \sin \frac{k \pi y}{b} \sin^2 \frac{r \pi x}{a} \sin^2 \frac{s \pi y}{b} dx dy \\ &= \frac{\pi^3 a b r^4}{2 a^4} \sum_k P_k q_{rs} \cos \omega t = \frac{mab}{4} \eta_{rs} \omega_{rs}^2 q_{rs} \cos \omega t, \end{aligned}$$

avec η_{rs} très petit, puisque $m \omega_{rs}^2 = D \pi^4 \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right)^2 = \frac{\pi^4 r^4}{a^4}$. L'équation de Lagrange en q_{rs} est donc :

$$(71) \quad \ddot{q}_{rs} + \frac{2 \rho c}{m} \dot{q}_{rs} + \omega_{rs}^2 (1 - \eta_{rs} \cos \omega t) q_{rs} = \frac{32 \rho c}{\pi^2 r s m} \cos \omega t.$$

(1) TIMOSHENKO, *Théorie de la Stabilité élastique* (trad. fr., Paris 1943), équation (201).

Il serait aisé de ramener (66) à une équation de Mathieu classique; mais nous n'y avons pas intérêt, attendu que nous cherchons seulement une deuxième approximation pour $\eta_{rs} \ll 1$, et qu'il est plus simple de l'obtenir directement. Nous remplacerons donc, comme au paragraphe précédent, q_{rs} par sa première approximation du § 7 dans le terme en η_{rs} , ce qui donne :

$$\ddot{q}_{rs}^{(2)} + \frac{2 \rho c}{m} \dot{q}_{rs}^{(2)} + \omega_{rs}^2 q_{rs}^{(2)} = \frac{32 \rho c}{\pi^2 r s m} \left[\cos \omega t + \frac{\eta_{rs} \omega_{rs}^2 \cos \varphi}{2 F(\omega'_{rs}, \omega)} + \frac{\eta_{rs} \omega_{rs}^2 \cos(2 \omega t - \varphi)}{2 F(\omega'_{rs}, \omega)} \right],$$

où l'on a posé :

$$F^2 = (\omega_{rs}^2 - \omega^2)^2 + \frac{4 \rho^2 c^2 \omega^2}{m^2},$$

d'où nous tirons comme au paragraphe précédent, en posant :

$$q^{(2)} = q^{(1)} + A + B \cos(2 \omega t - \psi),$$

et en identifiant :

$$(72) \quad q_{rs}^{(2)} = q_{rs}^{(1)} + \frac{16 \rho c}{\pi^2 r s m} \left[\frac{\eta_{rs} \omega_{rs}^2 (\omega_{rs}^2 - \omega^2)}{(\omega_{rs}^2 - \omega^2)^2 + \frac{4 \rho^2 c^2 \omega^2}{m^2}} + \frac{\eta_{rs} \omega_{rs}^2 \cos(2 \omega t - \psi)}{\sqrt{(\omega_{rs}^2 - \omega^2)^2 + \frac{4 \rho^2 c^2 \omega^2}{m^2}} \sqrt{(\omega_{rs}^2 - 4 \omega^2)^2 + \frac{16 \rho^2 c^2 \omega^2}{m^2}}} \right].$$

Cette expression appelle les mêmes commentaires qu'au § 26 relativement à la déformée moyenne et à la naissance de sons à l'octave supérieur. Quant à la transparence additionnelle, on aura de même :

$$\begin{aligned} \tilde{v}^{(2)} &= \sum \left(\frac{16 \rho c}{\pi^2 r s m} \right)^2 \omega^2 \frac{\eta_{rs}^2 \omega_{rs}^2}{\left\{ (\omega_{rs}^2 - \omega^2)^2 + \frac{4 \rho^2 c^2 \omega^2}{m^2} \right\} \left\{ (\omega_{rs}^2 - 4 \omega^2)^2 + \frac{16 \rho^2 c^2 \omega^2}{m^2} \right\}} \\ &= \sum \frac{m^2}{4 \rho^2 c^2 \pi^4} \cdot \frac{\eta_{rs}^2}{r^2 s^2} \cdot \frac{1}{x^2 \left[1 + \beta^2 \left(\frac{1 - x^2}{x} \right)^2 \right] \left[1 + \beta^2 \left(\frac{1 - 4 x^2}{2 x} \right)^2 \right]}. \end{aligned}$$

Suivant que $x \ll 1$, de l'ordre de 1 à 2, ou $\gg 2$, le dénominateur en x prend les formes :

$$\beta^2 \cdot \frac{\beta^2}{4 x^2}; \quad 2 \beta^2 x^2; \quad \beta^2 x^4 \cdot 4 \beta^2 x^4.$$

Nous écrirons donc, en désignant par H une borne supérieure commune aux η_{rs} :

$$\begin{aligned} \tilde{v}^{(2)} &< \frac{H^2}{\pi^4} \left[\sum_{< \frac{\omega}{2}} \frac{\rho^2 c^2}{m^2} \cdot \frac{\omega_{rs}^4}{r^2 s^2 \omega^8} + \sum_{\frac{\omega}{2}, \omega} \frac{1}{2 \omega^2 r^2 s^2} + \sum_{> \omega} \frac{16 \rho^2 c^2}{m^2} \cdot \frac{\omega^2}{r^2 s^2 \omega_{rs}^2} \right] \\ &< \frac{H^2}{\pi^4} \left[\frac{\rho^2 c^2}{m^2 \omega^4} \sum_{< \frac{\omega}{2}} + \frac{1}{2 \omega^2} \sum_{\frac{\omega}{2}, \omega} + \frac{16 \rho^2 c^2}{m^2} \sum_{> \omega} \right] \frac{1}{r^2 s^2}. \end{aligned}$$

Or nous savons, par les équations (21) et suivantes (où nous ferons la simplification qui nous a toujours servi précédemment, remplaçant a et b par leur moyenne géométrique $\sqrt{ab}$), que :

$$\sum_{<\omega} \frac{1}{r^2 s^2} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{K}{a^3 b^3 \omega}}; \quad \sum_{<\frac{\omega}{2}} \frac{1}{r^2 s^2} = \frac{1}{0,64} - \frac{1}{8} \sqrt{\frac{K}{a^3 b^3 \omega}};$$

d'où :

$$\sum_{\frac{\omega}{2}, \omega} \frac{1}{r^2 s^2} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{K}{a^3 b^3 \omega}} (\sqrt{2} - 1),$$

et :

$$\tilde{\nu}(2) < \frac{H^2}{\pi^4} \left[\frac{2 \rho^2 c^2}{m^2} \sqrt{\frac{K}{a^3 b^3 \omega}} + \frac{0,41}{16 \omega^2} \sqrt{\frac{K}{a^3 b^3 \omega}} - \frac{\rho^2 c^2}{8 m^2 \omega^4} \sqrt{\frac{K}{a^3 b^3 \omega}} + \frac{\rho^2 c^2}{0,64 m^2 \omega^4} \right].$$

La partie principale de cette transparence additionnelle est :

$$\frac{2 H^2 \rho^2 c^2}{m^2 \pi^4} \sqrt{\frac{K}{a^3 b^3 \omega}}.$$

Nous ne pouvons en calculer la valeur numérique, n'ayant pas de données sur H , mais ce que l'on peut dire, c'est que si cette correction est, dans un cas donné, suffisamment importante pour être sensible en présence de $\mathcal{C}(1)$, alors son effet sera de ralentir la variation de $\mathcal{C}$ avec la pulsation : en effet, elle apportera un terme en $\omega^{-\frac{1}{2}}$, qui varie lentement en comparaison avec les termes en ω^{-1} et ω^{-2} du premier ordre.

Une autre remarque s'impose, à propos de l'intégration approchée de l'équation (71). Nous avons cherché, pour q_{rs} , une expression de période $\frac{2\pi}{\omega}$: à la rigueur, une telle périodicité n'est possible, comme nous l'apprend la théorie générale, que si $\eta_{rs} \omega_{rs}^2$ fait partie du spectre de l'équation de Mathieu. Le cas où un tel accord existerait d'avance entre la structure des raidisseurs et celle des plaques est exceptionnel, et nous pouvons l'écarter. Il pourra donc se présenter, soit que l'énergie de vibration des plaques soit la plus forte, et synchronise de force le réseau des raidisseurs, ou bien au contraire que le réseau ait l'énergie la plus importante, et alors la solution en q_{rs} n'étant pas périodique, il se produira un flambage des plaques. Nous nous contentons d'indiquer cette éventualité, dont la discussion plus poussée sortirait du cadre de ce travail.

DEUXIÈME PARTIE

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE
DES CARACTÉRISTIQUES DE TRANSPARENCE
DE PANNEAUX ÉLASTIQUES

VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES : MÉTHODE

28. — Importance de relevés continus et automatiques.

Le principe d'une méthode de mesure de la transparence découle immédiatement de la définition de celle-ci : le panneau étudié étant encastré dans un mur aussi rigide que possible séparant deux salles, on produira dans la salle avant des ondes sonores planes, on mesurera leur énergie, puis on mesurera l'énergie du son perçu dans la salle arrière, et l'on fera le rapport de ces deux grandeurs. Nous reviendrons un peu plus loin sur la production des ondes planes, qui exige que la salle avant soit « sans écho » (*anechoic*, comme disent les auteurs américains; cette expression est bien préférable à celle de « chambre sourde » que l'on avait utilisée auparavant, et qui désigne mieux une enceinte impénétrable aux bruits extérieurs, ce qui est tout autre chose). Pour ce qui est de la mesure des énergies sonores, qui est le point principal de l'expérience, elle revient pratiquement à celle de grandeurs électriques, après une double transformation : une excitation électrique constante (mesurée) produit une énergie sonore dans un haut-parleur; celle-ci est recueillie par un microphone, qui la retraduit en intensité électrique (mesurée). Cette double transformation a, en fonction de la pulsation ω , une caractéristique $g(\omega)$, que l'on s'efforcera de rendre aussi peu variable que possible en choisissant convenablement source et récepteur, mais qui n'est cependant jamais une constante; de sorte que le rapport mesuré est finalement, non pas $\frac{W(\omega)}{W_0(\omega)}$, rapport des deux énergies acoustiques qui nous intéressent, mais bien :

$$\frac{W(\omega) g(\omega)}{W_0(\omega) g(\omega)}.$$

Si les mesures sont faites point par point, c'est-à-dire si l'on se fixe une pulsation, que l'on mesure $W_0 g$ incidente (ce qui ne peut se faire qu'en laissant la fenêtre ouverte, pour éviter l'onde réfléchie), puis que l'on scelle le panneau et que l'on mesure Wg , et qu'on recommence les mêmes opérations pour différentes fréquences, on se trouve devant un dilemme dont les deux branches présentent de graves inconvénients : ou bien, en effet, on procède dans l'ordre qui vient d'être exposé, ce qui exige le descellement du panneau après la détermination de chaque point, et multiplie par suite un travail fastidieux qui courra le risque de ne pas être exécuté à la longue avec tout le soin nécessaire; ou bien, solution que chaque expérimentateur finirait par adopter en fait,

on effectue une série de mesures Wg à différentes fréquences, puis on descelle le panneau et l'on relève les $W_0 g$ aux mêmes fréquences. Mais si l'on a gagné ainsi beaucoup de temps et de peine, on n'est plus certain de comparer entre elles des grandeurs correspondant rigoureusement aux mêmes fréquences; et ceci est grave, car l'erreur $\delta \omega$ se traduit par une erreur relative $\left(\frac{\delta W}{W} + \frac{\delta g}{g} \right)$ sur la transparence : or, si l'on peut admettre qu'on arrivera à rendre la variation de g lente en fonction de ω , par contre W présente de nombreuses résonances très aiguës, et séparées par quelques périodes seulement, ou même par des fractions de période, aux fréquences élevées. A la vérité, on peut s'astreindre, au cours des deux séries de mesures, à se placer toujours « sur la pointe » ou toujours « dans le creux » de la courbe de réponse; encore ne sait-on pas si, entre les deux séries de résultats, on compare les pointes ou les creux homologues ou bien des voisins. On conçoit qu'il soit possible, de la sorte, d'obtenir des rapports $\frac{W}{W_0}$ entachés d'erreurs tout à fait imprévisibles.

Ces difficultés disparaissent si, au lieu de procéder à des mesures point par point, on arrive à décrire d'un trait continu la courbe de réponse $W(\omega)$ ou $W_0(\omega)$, en faisant varier de façon continue la pulsation des ondes sonores. Même si l'échelle des fréquences n'était pas définie avec une stabilité parfaite, il serait aisé, saisissant l'allure de toute la courbe d'un coup d'œil :

1^o De moyenniser les résultats, et de comparer entre elles deux courbes expurgées d'incidents sans intérêt;

2^o De faire correspondre les points remarquables sans crainte d'erreur.

Enfin, la technique des expériences sera évidemment facilitée par un relevé automatique.

Nous nous sommes donc imposé la condition que les relevés soient à la fois continus et automatiques, c'est-à-dire que la variation de la fréquence acoustique commande, sans autre intervention de l'expérimentateur, l'inscription directe de la courbe $W(\omega)$. Nous avons utilisé, à cet effet, l'oscillographe cathodique, dont la souplesse est particulièrement propice au genre d'application que nous lui demandions. Une paire de plaques est soumise à une différence de potentiel, fonction monotone de la fréquence d'excitation de la source sonore, l'autre à une différence de potentiel dépendant de l'intensité perçue au microphone; il s'agit donc d'obtenir de telles tensions électriques. Pour les fréquences, il sera très commode, et conforme aux habitudes des acousticiens, d'avoir une échelle logarithmique; pour les intensités, une échelle linéaire serait satisfaisante, mais ici encore la loi logarithmique sera préférable, car elle permettra d'exprimer les transparences mesurées en décibels d'affaiblissement du niveau d'énergie incidente, par simple soustraction des ordonnées de même abscisse des deux courbes de réponse $W(\omega)$ et $W_0(\omega)$.

29. — Obtention d'une échelle logarithmique des fréquences.

Le problème consiste, étant donné une tension électrique d'amplitude constante et de fréquence variable, de la transformer en une tension d'amplitude variable (avec la fréquence, suivant une loi déterminée) et de fréquence constante (tension continue, de

fréquence zéro). Ceci peut être réalisé au moyen d'un quadripôle passif : en effet, on sait que le carré de la constante de transfert d'un tel quadripôle s'exprime toujours par une fraction rationnelle en ω^2 (ω pulsation de la tension à l'entrée) (1); soit :

$$x^2 = \frac{P(\omega^2)}{Q(\omega^2)},$$

où P et Q sont deux polynômes dont les coefficients dépendent, de façon généralement biunivoque, des impédances constitutives du quadripôle. On pourra donc en général :

1° Choisir le degré des polynômes et les valeurs des coefficients pour donner à $x(\omega)$ l'allure que l'on désire : si m et n sont les degrés respectifs de P et de Q , on dispose en effet de $n + m + 2$ coefficients arbitraires, ce qui permet de faire passer la courbe $x(\omega)$ par $m + n + 2$ points fixés à l'avance;

2° Ces coefficients une fois choisis, de calculer les impédances. Le problème n'admettra pas toujours de solution acceptable, car les impédances sont soumises à des conditions de réalité et de signe; mais connaissant l'allure de variation-type de différentes

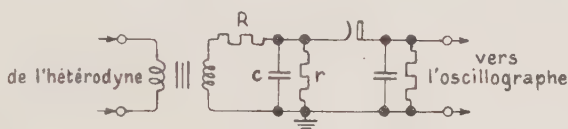


Fig. 7. — Circuit pour la production d'une tension continue fonction logarithmique de la fréquence de l'hétérodyne à amplitude constante

cellules, il ne sera pas difficile d'en choisir qui puissent s'adapter à la solution cherchée, de sorte que le calcul puisse être mené à bonne fin.

Nous nous proposons de réaliser la loi $x = a + b \cdot \log \omega^2$, où a et b sont des constantes. Le répertoire des filtres de Zobel (*l. c.*), par exemple, permettra de trouver des cellules quadripôles à structures plus ou moins compliquées qui permettront de vérifier une telle relation en 4, ou 5, ou 6, ..., points de l'échelle. Nous avons jugé tout à fait suffisant d'assurer cette coïncidence aux frontières et au milieu de l'intervalle, ce qui permet d'utiliser la cellule très simple figurée ci-contre (*fig. 7*) : elle comprend une résistance R en série, et en dérivation une résistance r shuntée par une capacité C . La loi de transformation (module du rapport des impédances des deux branches) est :

$$x^2 = \frac{R^2}{(r + R)^2 + (rRC \omega)^2}.$$

Le calcul des impédances peut alors se faire comme suit : on se donne les deux pulsations frontières et la pulsation moyenne auxquelles l'échelle coïncidera avec l'échelle logarithmique, soit $\omega - \Omega$, ω et $\omega + \Omega$; il faudra satisfaire à trois équations simultanées de la forme :

$$(R + r)^2 + (RrC)^2 \omega^2 = \frac{R^2}{(a + b \log \omega)^2},$$

(1) Cf. par ex. : ZOBEL, *Bell System Tech. J.*, 1928, p. 438.

soit, en posant $R^2 = u$, $r(1 + 2R) = v$, $(RrC)^2 = w$, à trois équations :

$$Au + v + (\omega - \Omega)^2 w = 0;$$

$$Bu + v + (\omega)^2 w = 0;$$

$$Cu + v + (\omega + \Omega)^2 w = 0,$$

avec

$$A = 1 - (a + b \log(\omega - \Omega))^{-2}, B = 1 - (a + b \log \omega)^{-2}, C = 1 - (a + b \log(\omega + \Omega))^{-2}.$$

Le déterminant de ce système doit être nul, ce qui donne une relation entre a et b , qui pourra toujours être satisfaite, puisque ces coefficients sont arbitraires. On aura alors les valeurs de $\frac{u}{w}$ et $\frac{v}{w}$, soit U et V , d'où enfin :

$$r^2 C^2 = \frac{1}{U}; \quad \frac{V}{U} R^2 - 2rR + r = 0,$$

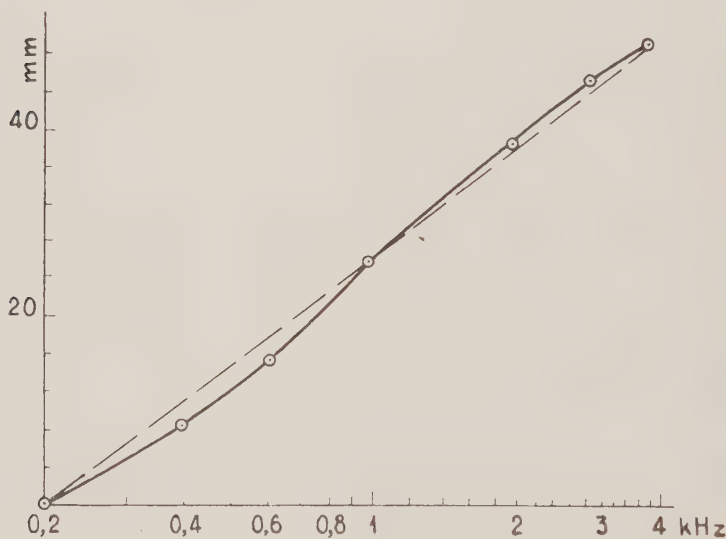


Fig. 8. — Étalonnage de l'échelle des fréquences

et il suffira, pour que les racines de l'équation du second degré soient réelles, que r soit supérieur à $\frac{V}{U}$. Nous choisirons donc une telle valeur de r , et R , C s'ensuivront. Ce procédé de calcul s'avère pratiquement plus commode que celui, mathématiquement plus direct, qui consisterait à satisfaire à une relation telle que :

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{\log\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)}{\log\left(\frac{\omega_3}{\omega_2}\right)}.$$

La tension aux bornes de sortie de la cellule est ensuite rectifiée au moyen d'une diode et d'une cellule de filtrage à résistance et capacité; on dispose encore là d'un moyen

pour retoucher un peu la courbe de réponse du quadripôle. La tension continue que nous avons obtenue par ce procédé (en adoptant $r = 35\,000\ \Omega$, $R = 40\,000\ \Omega$, $C = 0,005\ \mu\text{F}$ pour la cellule de transformation, et $10^6\ \Omega$ en parallèle avec $1\ \mu\text{F}$ pour l'impédance de charge de la diode EB 4), varie avec la fréquence suivant une loi très suffisamment approchée de la logarithmique dans l'intervalle 200-4 000 Hz que nous nous sommes fixé : c'est ce qu'on voit sur la courbe d'étalonnage de la figure 8, où les ordonnées sont exprimées en mm de déviation sur l'écran de l'oscillographe de mesure.

30. — Amplification logarithmique des courants microphoniques.

On sait, depuis BALLANTINE (1), qu'il est possible de choisir les conditions de fonctionnement d'une lampe à pente variable de manière que son courant anodique soit proportionnel au logarithme de la tension du signal appliqué à la grille. Il sera aisé de trouver ces conditions de fonctionnement, pour une lampe donnée, en traçant un réseau de caractéristiques dynamique sur un papier à graduation linéaire dans une dimension et exponentielle dans l'autre; on s'apercevra qu'elles correspondent, pour une pentode,

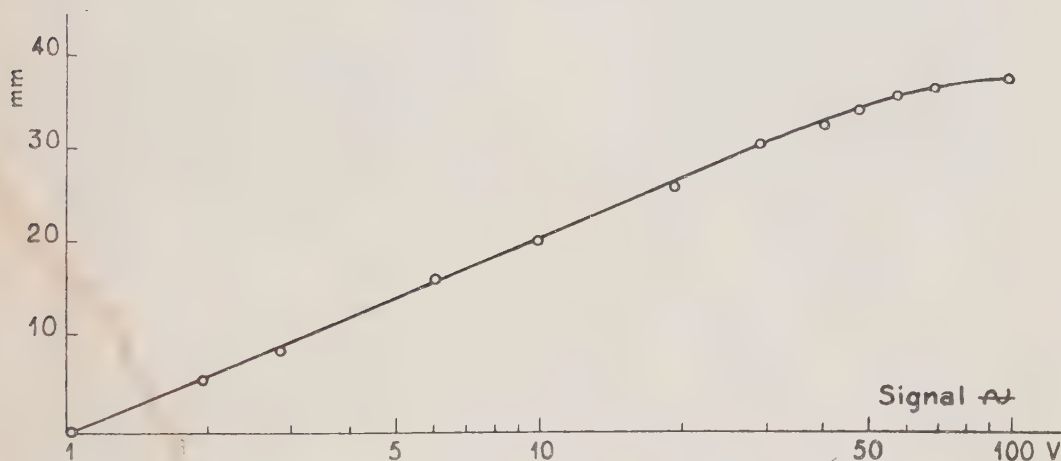


Fig. 9. — Étalonnage de l'amplificateur à sensibilité logarithmique

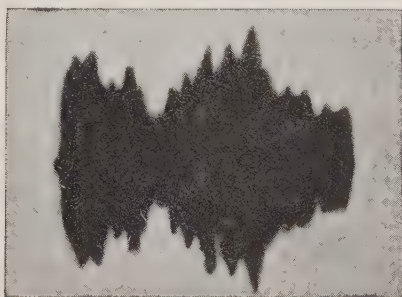
à une tension de grille-écran assez faible et à une impédance de charge peu élevée; il n'est d'ailleurs pas particulièrement avantageux, pour cette application, de recourir à des tétrodes telles que la 35, originellement utilisée par BALLANTINE. C'est ainsi qu'une EF 9 permet d'obtenir une réponse bien logarithmique des signaux compris entre 1 et 10 V, avec un débit sensiblement indifférent à toute variation du signal au-dessous de 1 V ou au-dessus de 10 V. Pour élargir cette gamme 1-10 qui ne peut nous suffire, il faut employer plusieurs étages; un procédé efficace a été décrit par P. CHAVASSE (2). Nous en avons utilisé un quelque peu différent, qui donne une gamme moins large,

(1) BALLANTINE 1931, 1933.

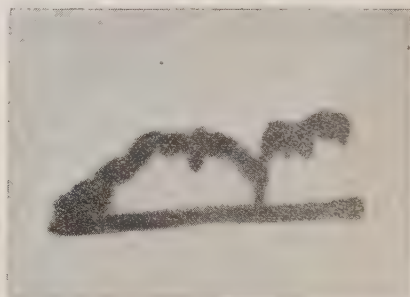
(2) CHAVASSE 1945.

mais suffisant à nos besoins, et met en œuvre un montage plus simple : il consiste à attaquer la grille d'un étage par le signal microphonique, après transformation de celui-ci dans un rapport convenable, et celle du deuxième étage, par le même signal, après transformation dans un rapport 10 fois plus grand. Ainsi, lorsque le signal appliqué à la première grille est de 1 V, il est de 10 V sur la deuxième : la deuxième lampe ne fournit donc aucune variation de courant; par contre, les signaux amplifiés (entre 1 et 10 V) par la deuxième lampe correspondent à des tensions de grille de 0,1 à 1 V pour la première, qui ne fonctionne pas par conséquent. Il suffit dès lors d'appliquer aux plaques de l'oscillographe, après redressement et filtrage comme au § 29, la somme des chutes de tensions anodiques des deux étages pour avoir une gamme de variation de 1 à 100 (soit 40 db), qui nous suffit largement. La courbe de réponse de l'ensemble est reproduite sur la *figure 9*; les ordonnées sont toujours exprimées en mm de déviation sur l'écran de l'oscillographe.

Nous avons d'ailleurs vérifié d'une autre façon la correction de l'amplificateur logarithmique : quelques courbes de réponse ont été relevées au moyen d'un amplificateur



(a)



(b)

Fig. 10. — Exemples de relevés obtenus à l'oscillographe : (a) échelle linéaire d'amplitudes ; (b) échelle logarithmique d'amplitude. L'échelle des fréquences est logarithmique dans les deux cas

linéaire classique et au moyen de l'amplificateur logarithmique; les ordonnées de la première série ont été transformées en prenant leurs logarithmes, et les caractéristiques logarithmiques ainsi obtenues ont été comparées avec celles fournies directement par le dispositif décrit; les résultats de cette comparaison furent tout à fait satisfaisants. A titre d'illustration, nous reproduisons sur la *figure 10* l'aspect d'une courbe de réponse en ordonnées linéaires (a) et logarithmiques (b).

Notons en passant qu'il est indispensable, pour que les oscillogrammes puissent fournir des données quantitatives fiables, de vérifier qu'ils ne sont pas déformés par l'effet de barillet, ou de prendre des mesures pour éviter cette cause de distorsion. Dans le cas de l'oscillographe classique du commerce que nous avons utilisé (tube cathodique de 11 cm de diamètre), il suffit de ne pas sortir de la zone centrale de l'écran, formant un rectangle de 4 sur 6 cm environ.

31. — Dispositions des locaux pour les essais.

Pour que les résultats des mesures soient corrects, il est indispensable, comme nous l'avons fait observer au début de ce Chapitre, que les ondes tombant sur le panneau

soient planes; que, le panneau une fois enlevé, l'onde incidente soit la seule source du champ sonore, à l'exclusion de toute onde réfléchie; enfin, que l'espace situé derrière le panneau ne reçoive aucune énergie sonore autrement qu'à travers le panneau. La salle avant devra donc être sans écho; la salle arrière devra être sourde; et l'ensemble des deux salles (fenêtre de communication ouverte) ne devra présenter aucun écho dans la

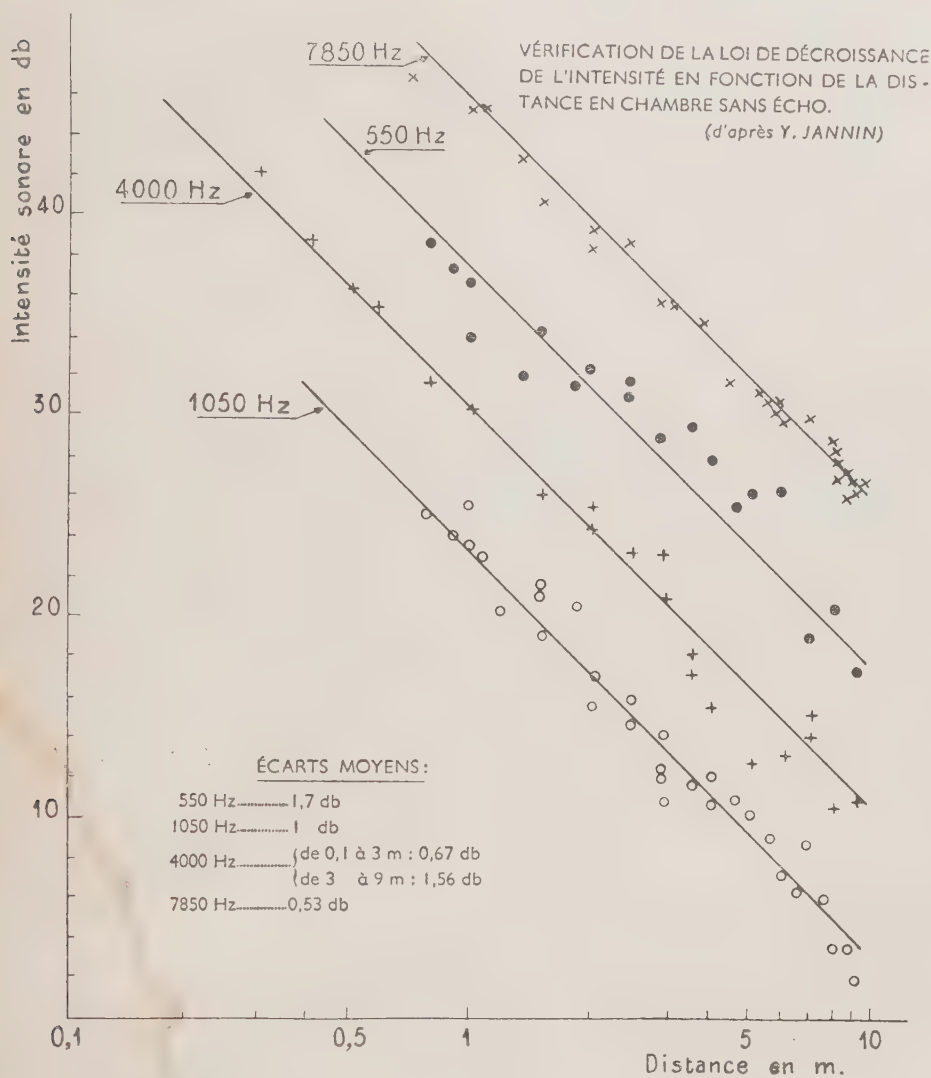


Fig. 11

partie avant. Il n'est pas rigoureusement indispensable que tout écho soit absent de la salle arrière, encore que ce soit évidemment préférable, car alors la position du microphone récepteur pourra être modifiée dans une petite mesure sans que cela fausse les résultats.

1° La salle avant utilisée est la grande salle sans écho du Centre de Recherches S.I.M. de Marseille (1); la figure 11 reproduit des résultats de mesures de Y. JANNIN (1)

(1) CANAC 1944; JANNIN 1944; CANAC et VOGEL 1946.

montrant l'erreur que l'on s'expose à commettre en considérant les ondes émises à l'intérieur de cette salle comme se propageant librement (et, par suite, comme planes dans un angle suffisamment faible et assez loin de la source). Cette erreur est tout à fait acceptable, étant donné qu'il serait hasardeux de considérer les mesures de transparence comme exactes à mieux de 2-3 db près;

2° La salle arrière, attenante à un mur extérieur de la précédente, fut construite exprès pour les expériences dont il va être rendu compte. Elle consiste, à l'intérieur d'un petit bâtiment en briques pleines, en une cabine formée de panneaux de « Perfecta » (copeaux de bois et plâtre) munis d'un épais matelas de soie de verre maintenu lâchement par des ficelles formant treillage. Cette cabine repose sur une dalle de béton coulée sur un matelas de soie de verre, lequel repose sur une couche de 10 cm de sable et de 20 cm de grayats; elle est donc parfaitement isolée des vibrations qui pourraient se propager dans le bâtiment principal ou dans le sol. Un point plus délicat est l'isolement acoustique des deux salles entre elles; celui-ci est difficile à évaluer avec précision à cause de la fenêtre de communication, qu'il faudrait pouvoir boucher de façon que sa transparence fût

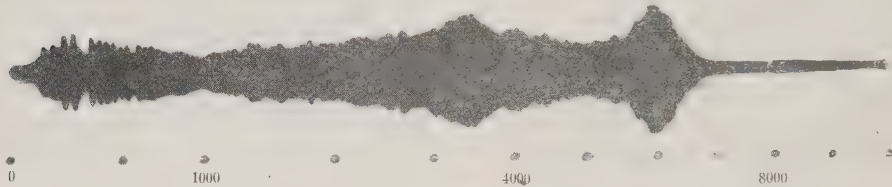


Fig. 12 — Courbe de réponse de la chambre de compression (échelle linéaire pour les amplitudes; abscisses en Hz)

nulle, et que toute l'énergie recueillie dans l'arrière-salle ne pût passer que par le mur. On peut être certain, en tous cas, que les fuites par le mur et par les scellements des panneaux ne sont pas supérieures à l'énergie la plus faible que l'on aura mesurée en essayant des panneaux aussi absorbants que possible; nous avons pu mesurer ainsi des transparences de 10^{-6} (60 db au-dessous du niveau d'émission); les fuites sont donc négligeables pour les mesures qui nous intéresseront ci-après, et qui portent sur des transparences supérieures à — 40, et même en général à — 30 db.

Enfin la condition de propagation non troublée par l'ouverture de l'arrière-salle sur la salle principale a été satisfaite avec une précision qui suffit à nos besoins, grâce à la forte absorption des parois de l'arrière-salle. On l'a vérifié de la manière suivante : une courbe de réponse fut relevée au point de suspension habituel du microphone, la fenêtre étant ouverte et la source braquée sur elle; puis la source fut retournée bout pour bout, de façon à se trouver dans la position correspondant aux essais en propagation libre de JANNIN, et une deuxième courbe de réponse fut enregistrée, le microphone se trouvant maintenant au fond de la salle sans écho, et à la même distance de la source que dans le premier essai. La comparaison des deux oscillogrammes ne permit de déceler entre eux aucune différence, ce qui établit bien que l'onde incidente n'est pas troublée par la présence de la fenêtre et de l'arrière-salle.

Les qualités de la source et du récepteur sont, en principe, indifférentes, pourvu qu'elles ne varient pas d'une mesure à l'autre; mais il est naturellement plus rassurant

de les savoir bonnes, et la courbe $g(\omega)$ du § 28 aussi rapprochée que possible d'une horizontale. Nous avons utilisé une chambre de compression L.M.T. munie d'un pavillon exponentiel, et excitée par une hétérodyne de la « General Radio Co »; la courbe de réponse de cet ensemble est excellente dans la bande de fréquence de 200-4 000 Hz que nous avons explorée, et la déborde largement de part et d'autre (*fig. 12*). Le son était reçu par un microphone électrodynamique L.M.T. muni de son préamplificateur, puis amplifié comme décrit ci-dessus, les alimentations étant assurées par des batteries d'accumulateurs blindées pour éviter les parasites éventuels provenant de l'hétérodyne. Enfin l'oscillographe utilisé était le type O.C.P. 31 de la Compagnie des Compteurs, muni d'un tube à fluorescence bleue (pour les enregistrements photographiques) et à post-rémanence verte facilitant l'observation directe.

Il faut signaler, pour en terminer avec la technique expérimentale, la nécessité de relever une caractéristique « à fenêtre ouverte » immédiatement avant ou après l'essai de chaque panneau, ou au moins une fois au cours de chaque séance de manipulation. Il s'avère en effet que cette caractéristique varie de façon décelable d'un jour à l'autre, pour des raisons que nous n'avons pas déterminées avec précision, mais qui tiennent certainement en partie à l'état hygrométrique de l'air, à la température, etc., dont l'influence sur les conditions de propagation du son dans la salle n'a rien de surprenant. Toutefois, nous avons soigneusement vérifié que l'essai répété d'un même panneau à des époques différentes, et qui correspondaient à des caractéristiques différentes « à fenêtre ouverte », donnait toujours la même courbe de transparence, avec par endroits des variations de l'ordre de 1 à 2 db; en même temps qu'une assurance de la validité de ces courbes, ce résultat nous fournit une valeur approchée de leur incertitude : car l'analyse des causes d'erreur dues à l'appareillage proprement dit ne donne, elle, que quelques pour-cent négligeables devant la dispersion que l'on vient de signaler. Nous estimons donc, en résumé, que les valeurs qui seront indiquées dans le Chapitre suivant sont justes à 2 ou 3 db près au pire..

CHAPITRE X

VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES : RÉSULTATS

32. — Rappel des résultats théoriques cruciaux.

Depuis la mise au point de la méthode et de l'appareillage décrits au Chapitre précédent, nous avons eu l'occasion de faire d'assez nombreux essais, portant sur des panneaux composites encollés de diverses substances ou couplés en parois multiples. La description de ces expériences, dont la plupart ne présentent qu'un intérêt technique, sortirait du cadre du présent travail; nous nous bornerons à rendre compte de celles effectuées spécialement en vue de vérifier tel point de notre étude théorique, ou pouvant servir à pareille fin. Nous allons donc, pour commencer, rassembler les résultats théoriques qui paraissent susceptibles d'une vérification suffisamment directe, et dont la signification soit cruciale pour la validité de tel point de vue ou de telle méthode de calcul adoptés dans les Chapitres I à VIII :

1° La transparence d'une plaque rectangulaire nue, sous incidence normale, doit vérifier la double inégalité (26"). En particulier, résultat riche de répercussions pratiques, la transparence d'une paroi décroîtra lorsque croîtra la surface des mailles de son armature;

2° Dans une paroi double formée de deux plaques identiques séparées par un intervalle d'air, la transparence doit être sensiblement indépendante de la valeur de celui-ci, pourvu qu'elle ne soit ni trop faible ni trop importante; la borne inférieure de la transparence est d'ailleurs celle même que la formule (26") prévoit pour la plaque avant seule;

3° Par contre, lorsque dans la double paroi à intervalle d'air la plaque arrière est beaucoup moins rigide que la plaque avant, on doit avoir une courbe de transparence en fonction de la fréquence d'allure tout à fait différente; il pourra y avoir, dans la bande acoustique, deux extrema donnés par (52) et (53); de plus, la valeur du minimum, lorsqu'il sera observable, devra être $\frac{0,32 K}{ab \omega}$, comme si la paroi se réduisait, pour cette fréquence, à la plaque avant seule;

4° Il pourra ne pas être facile d'observer une paroi formée de deux couches élastiques superposées (qui devrait, d'après (54), se comporter comme une plaque fictive de masse unitaire $m(1 + \mu)$ et de constante $K \sqrt{\frac{1 + \mu}{1 + \mu}}$); mais si l'une des deux

couches est poreuse, la transparence devra être régie par (58'); en particulier, sa borne inférieure ne devra dépendre que de la porosité du revêtement, et la supérieure du poids de celui-ci;

5° Il sera d'ailleurs possible de préciser le résultat précédent en utilisant (59), si l'on a, au préalable, mesuré une autre grandeur physique indépendante de la transparence, à savoir l'absorption de l'énergie sonore par la paroi lors d'une réflexion. Nous n'avons pas l'intention d'insister ici sur cette question, parce que nous ne la considérons pas comme suffisamment mûre au point de vue théorique; tous les panneaux que nous avons essayés ont fait également l'objet de mesures d'absorption à la réflexion, par la méthode que nous avons décrite ailleurs (1), et que nous avons justifiée par le schème de Lord RAYLEIGH (cf. supra, § 24); mais le problème serait à reprendre, et nous comptons l'aborder dans un prochain travail. On ne verra donc dans la correction d'absorption (59), pour l'instant, qu'une première approximation un peu grossière.

33. — Expériences sur des plaques nues.

Pour vérifier les points 1° et 2° du paragraphe précédent, nous avons réalisé quatre panneaux en tôle d'Al de 1 mm d'épaisseur. Le premier, que nous désignerons par « A », avait pour dimensions 200 cm sur 100 cm; le deuxième, « O », était un carré de 100×100 cm²; le troisième, « A' », avait les dimensions de « A », mais était raidi par des profilés rivés qui le partageaient en mailles de 33×100 cm² (un profilé horizontal et deux verticaux); enfin le panneau « 1 » avait les dimensions de « O », mais était partagé en mailles de 33×25 cm² par deux raidisseurs horizontaux et trois verticaux.

Le coefficient K valant ici $1,48 \cdot 10^5$ pour les quatre plaques ($E = 7 \cdot 10^{11}$, $m = 0,27$; $\sigma = 0,3$), les éléments de $\bar{\epsilon}$ se calculent comme suit, pour quelques fréquences comprises dans la bande de 200 à 4 000 Hz :

TABLEAU I

ω	$\bar{\epsilon}_D$	$\bar{\epsilon}'_A$	$\bar{\epsilon}'_O$	$\bar{\epsilon}'_{A'}$	$\bar{\epsilon}'_1$	DÉCIBELS				
						$\bar{\epsilon}_D$	$\bar{\epsilon}_A$	$\bar{\epsilon}_O$	$\bar{\epsilon}'_A$	$\bar{\epsilon}_1$
1 200	0,061	0,002	0,004	0,012	0,048	— 12	— 27	— 24	— 19	— 13
	0,063	0,063	0,065	0,073	0,109		— 12	— 12	— 11	— 9
2 400	0,015	0,001	0,002	0,006	0,024	— 18	— 30	— 27	— 22	— 16
		0,016	0,017	0,021	0,039		— 18	— 18	— 17	— 14
6 000	0,0024	0,0004	0,0008	0,0024	0,0097	— 26	— 34	— 31	— 26	— 20
		0,0028	0,0032	0,0048	0,0121		— 26	— 25	— 23	— 19
24 000	0,00015	0,0001	0,0002	0,0006	0,0024	— 38	— 40	— 37	— 32	— 26
		0,0002	0,0003	0,0007	0,0025		— 36	— 34	— 31	— 26

(1) VOGEL 1945.

La deuxième colonne donne les valeurs du « terme de Davis » $\bar{c}_D = \frac{4 \rho^2 c^2}{m^2 \omega^2}$ qui est le même pour les quatre panneaux; les troisième, quatrième, cinquième et sixième colonnes donnent respectivement la valeur de $\frac{0,32 K}{ab \omega}$ pour chacune des quatre plaques, et, au-dessous, la somme des deux termes qui composent la borne supérieure de la transparence d'après (26''); enfin les colonnes suivantes reprennent les mêmes résultats et les expriment, comme il est courant de le faire en Acoustique, en décibels au-dessous du niveau de l'énergie incidente.

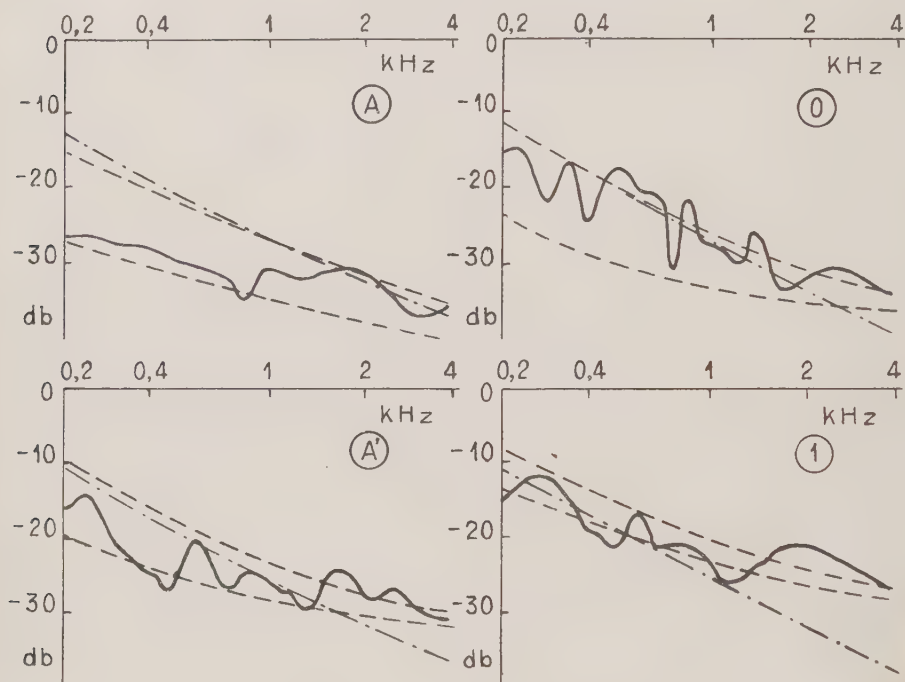


PLANCHE I. — Panneaux élastiques nus (Al 1 mm $\neq$)
 Courbes — $\bar{C}(\omega)$ relevées; --- calculées (VOGEL); -.-.- calculées (DAVIS)
 Mailles : A —.—.— 200 $\times$ 100 cm²; 0 —.—.— 100 $\times$ 100 cm²; A' —.—.— 33 $\times$ 100 cm²;
 1 —.—.— 33 $\times$ 25 cm²

Les transparences mesurées des quatre panneaux ont été figurées en fonction de la fréquence sur la planche I; on y a tracé également les bornes calculées du tableau précédent, ainsi que les transparences, selon DAVIS, à titre de comparaison.

On voit que les points expérimentaux sont, en général, bien situés à l'intérieur des frontières que leur traçait notre théorie, et que s'ils s'en écartent exceptionnellement, ce n'est jamais d'une quantité bien supérieure à celle indiquée au § 31 comme erreur possible; la formule de Davis rend beaucoup moins bien compte des résultats, surtout pour les mailles de faible surface et aux fréquences aiguës.

Nous avons déjà eu l'occasion de signaler, comme conséquence importante de (26''), que l'augmentation de la surface des mailles devait conduire à un accroissement

de l'absorption, surtout aux aiguës. Si l'effet n'est pas extrêmement net lorsqu'on compare les panneaux O et A', il est frappant pour A et O, ainsi que pour A et 1, et sensible pour O et 1. L'existence de l'effet est donc certaine, et si la comparaison entre O et A' n'est pas très concluante lorsqu'on la considère séparément, sans doute cela tient-il à un raidissement insuffisant du panneau A', dont la subdivision en mailles de 33 sur 100 cm² n'était peut-être pas aussi parfaite qu'il aurait fallu. En effet, si les longs profilés verticaux de 200 cm vibraient quelque peu au cours de l'expérience, A' se trouverait ramené à l'état de deux panneaux O juxtaposés.

34. — Doubles parois à intervalle d'air.

Ces résultats étant acquis, nous avons constitué des parois doubles au moyen de deux plaques « O » scellées dans un cadre massif en fer profilé; l'écartement entre les deux plaques était de 3 cm pour le premier de ces panneaux, de 6 et de 12 cm pour le deuxième et le troisième respectivement. La formule (51) donne, en faisant $\xi = \mu = 1$ et en explicitant Q :

$$\bar{\tau} = \frac{0,32 K}{ab \omega} + \left[\frac{1,1 \cdot 10^8}{L m^2 \omega^3} \right]^2,$$

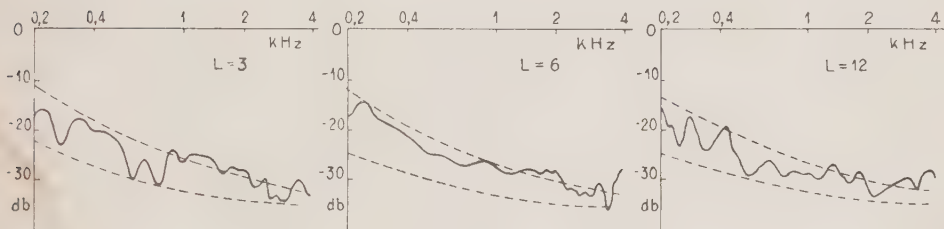


Fig. 13

----- Bornes de $\bar{\tau}$ calculées comme pour une plaque unique ;
 ——— $\bar{\tau}$ mesuré pour la double paroi ($\xi = \mu = 1$)

où le deuxième terme est négligeable dès que ω dépasse quelques milliers : la transparence d'une telle paroi doit donc être, en première approximation, indépendante de L, et égale à celle calculée pour une plaque unique. Or, voici les résultats obtenus avec les trois panneaux spécifiés plus haut (fig. 13) :

On voit que l'accord avec les prévisions est satisfaisant.

Pour réaliser des parois doubles à plaque arrière nettement moins rigide que la plaque avant, les moyens dont nous disposons ne nous ont pas laissé beaucoup de choix, et nous avons dû nous borner à deux constructions, que nous avons, du moins, voulues aussi différentes que possible : un premier panneau, marqué « a », consistait en une tôle d'aluminium de 1 mm d'épaisseur et de 100 × 100 cm² et une plaque de caoutchouc

mousse de 1 100 g, avec un intervalle d'air de 3 cm; le deuxième, marqué « *b* », consistait en une plaque d'Al de 10 mm d'épaisseur et de 100×100 cm², suivie d'une tôle de duralumin de 0,4 mm d'épaisseur, avec un intervalle d'air de 1 cm. On peut admettre que $\xi \neq 0$ dans les deux cas; d'autre part, $m = 0,27$ et $m\mu = 0,11$ pour « *a* », $m = 2,7$ et $m\mu = 0,108$ pour « *b* »; d'où un maximum de transparence pour :

$$\Omega = 1160 (Lm\mu)^{-\frac{1}{2}} = 2025 \text{ pour « a »} \quad \text{et} \quad = 3550 \text{ pour « b »},$$

et de même des minima, situés respectivement à $\frac{\Omega}{\sqrt{5}} = 910$ et 1600, et valant respectivement 0,005 (= - 23 db) et 0,03 (= - 15 db).

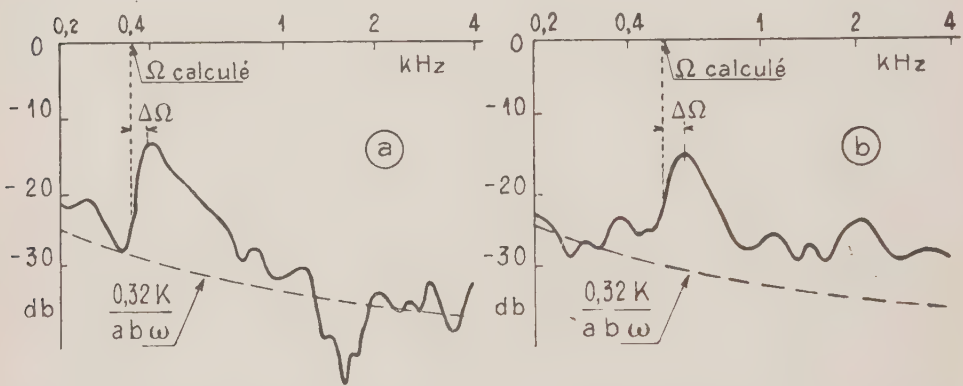


Fig. 14. — Doubles parois à plaque AR peu rigide

— transparence mesurée; ---- transparence calculée de la plaque AV seule
 Ω : maximum théorique de transparence. $\Delta\Omega$: écart en réalité

La figure 14 permet de comparer ces prévisions avec l'expérience : on voit que les maxima sont très nets, et se situent vers 2500 (au lieu de 2025) et 3900 (au lieu de 3550). Le minimum théorique de « *a* » tombe en dehors de la bande explorée, mais une extrapolation ne rend pas invraisemblable l'ordre de grandeur indiqué; celui de « *b* » semble bien coïncider avec un minimum réel, lequel est toutefois nettement inférieur aux 15 db prévus. Il faut se rappeler, toutefois, que les deux maxima se situent aux très basses fréquences, où la théorie développée s'applique certainement moins bien, même si ces fréquences sont sensiblement plus grandes que la fondamentale; peut-être pourra-t-on conclure, dans ces conditions, que les deux panneaux essayés ne s'écartent pas trop, même quantitativement, du comportement théorique.

35. — Plaques à revêtements poreux.

Enfin nous extrayons des résultats d'essais techniques portant sur des plaques à revêtements poreux ceux où les revêtements étaient à peu près homogènes, et pour

lesquels, par conséquent, il est permis d'espérer un accord approximatif avec la théorie du Chapitre VII. En voici la spécification sommaire :

TABLEAU II

PANNEAU N°	NATURE DU REVÊTEMENT	POROSITÉ	SURCHARGE AU M ²
<i>c</i>	Feutre	0,9	0,20
<i>d</i>	Amiante	0,7	0,30
<i>e</i>	Feutre	0,9	0,35
<i>f</i>	Feutre encollé	0,8	0,45
<i>g</i>	Amiante	0,7	0,60
<i>h</i>	Laine de verre	0,8	0,72
<i>i</i>	Laine de verre agglomérée	0,7	0,90

Pour appliquer la formule (58'), il nous faut calculer les valeurs de $\frac{0,32 K}{ab \omega}$, celles de ce facteur multiplié par $(1 - P)$, et celles de $\frac{1}{m^2} \frac{\rho^2 c^2}{\omega^2}$ multiplié par le facteur de surcharge $(1 + \mu)^{-2}$. Le support élastique était, dans tous les cas, identique au panneau « 1 » du § 33; nous empruntons donc les valeurs des termes relatifs à ce panneau nu au tableau I :

TABLEAU III

ω	$\bar{c}'_1$	P = 0,7	P = 0,8	P = 0,9	$\bar{c}_D$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,5$	$\mu = 0,7$	$\mu = 0,9$
1 200	0,048	0,0144	0,0096	0,0048	0,061	0,090	0,077	0,069	0,065
2 400	0,024	0,0072	0,0048	0,0024	0,015	0,034	0,031	0,029	0,028
6 000	0,0097	0,0029	0,0019	0,00097	0,0024	0,011	0,011	0,010	0,010
24 000	0,0024	0,00072	0,0005	0,00024	0,00015	0,002	0,002	0,002	0,002

Comme on pouvait le prévoir, l'influence de la surcharge est faible.

La planche de la page précédente montre (en trait interrompu) les bornes calculées d'après le tableau II pour les différents panneaux essayés, et (en trait plein) les caractéristiques expérimentales. On voit que l'accord est excellent, à cela près que l'écart entre les bornes étant d'une dizaine de décibels pour les porosités élevées, l'approximation qu'elles fournissent pourra être jugée un peu lâche. Cette objection, qui diminue l'efficacité de la formule (60), n'enlève d'ailleurs rien à sa validité, puisque l'accord est aussi bon pour les panneaux « *d* », « *g* » et « *i* », dont les bornes sont sensiblement plus resserrées.

Nous pouvons d'ailleurs essayer d'améliorer l'approximation en utilisant (64), et en adoptant pour Δ les valeurs expérimentales publiées dans un précédent travail (1).

(1) VOGEL 1945.

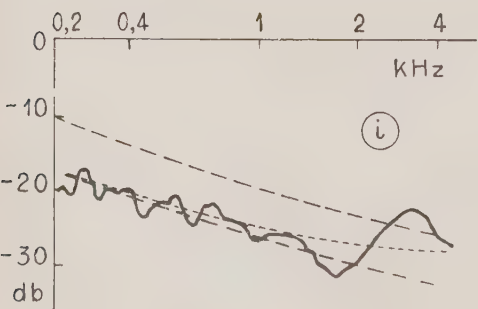
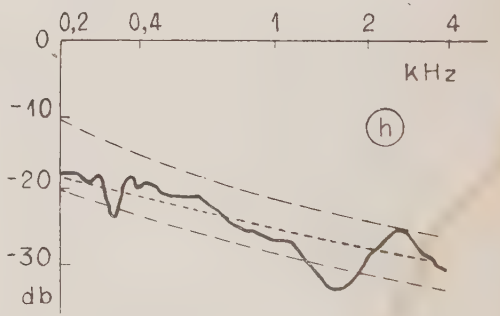
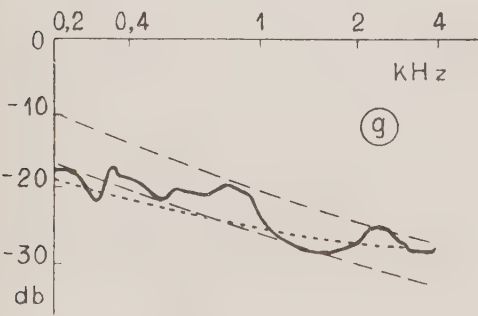
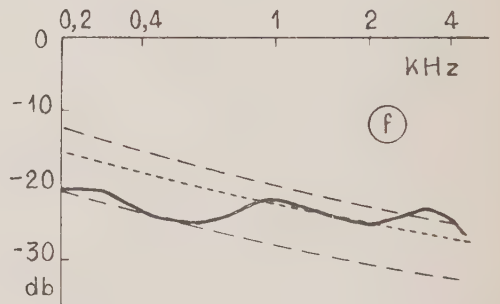
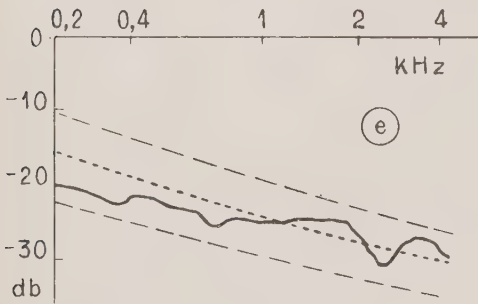
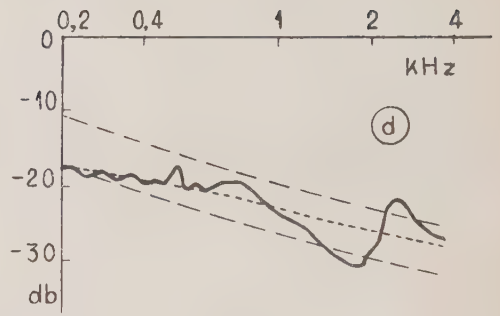
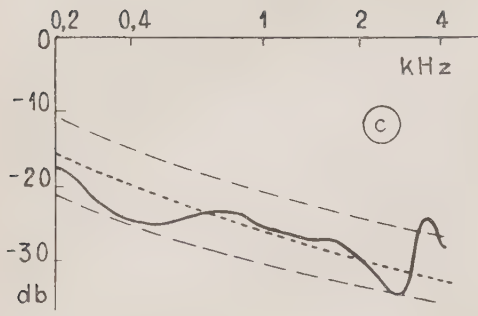


PLANCHE II. — Transparence de plaques élastiques à revêtements poreux
— courbes relevées expérimentalement; --- bornes calculées

Les bornes s'étant alors resserrées, d'après la remarque faite au § 25, il suffira d'ailleurs de calculer l'une d'elles, soit $\frac{0,32 K \sqrt{P (P - \mathfrak{A})}}{ab \omega}$. Les résultats numériques correspondants sont consignés au tableau suivant :

TABLEAU IV

POROSITÉ	PANNEAU	$\omega =$				POROSITÉ	PANNEAU	$\omega =$				
	N°	1 450	4 000	5 400	13 000		N°	1 450	4 000	5 400	13 000	
0,9	c	ℳ	0,54	0,18	0,45	0,44	d	ℳ	0,15	0,37	0,30	0,20
		R	0,57	0,80	0,63	0,63		R	0,62	0,48	0,53	0,59
		℄	0,022	0,011	0,0065	0,0028		℄	0,025	0,007	0,0057	0,0027
	e	ℳ	0,43	0,24	0,52	0,61	g	ℳ	0,52	0,28	0,29	0,43
		R	0,66	0,77	0,58	0,51		R	0,35	0,54	0,53	0,43
		℄	0,026	0,011	0,0062	0,0023		℄	0,014	0,008	0,0057	0,0019
0,8	f	ℳ	0,35	0,26	0,35	0,25	i	ℳ	0,47	0,18	0,25	0,25
		R	0,60	0,66	0,60	0,66		R	0,40	0,60	0,56	0,56
		℄	0,024	0,011	0,0064	0,0029		℄	0,016	0,0087	0,0060	0,0025
	h	ℳ	0,44	0,41	0,60	0,43	$R \equiv \sqrt{P (P - \mathfrak{A})}.$				$K = 1,48 \cdot 10^5.$	
		R	0,54	0,56	0,40	0,54	$\mathfrak{C} \equiv \frac{0,32 \text{ KR}}{ab \omega}.$				$ab = 825.$	
		℄	0,021	0,008	0,0043	0,0024						

Les courbes figuratives de cette approximation sont tracées en pointillé sur la planche : on voit qu'elles fournissent une représentation réellement satisfaisante des phénomènes observés, et justifient pleinement les considérations développées au § 25.

CONCLUSIONS

36. — Valeur de la méthode; extensions possibles.

Dès le début de ce travail, nous avons présenté le procédé de sommation utilisé comme une approximation destinée à rendre compte de l'allure générale des phénomènes, et qui « rabotait » délibérément tous les accidents de détail. Ainsi envisagés, on pourra juger que nos calculs ont été justifiés par l'expérience; les raisonnements simples que permettent les formules établies pourront donc désormais être appliqués, *a priori*, à tout problème analogue qui se poserait, avec la perspective d'en tirer une image générale du comportement d'un système vibrant. Les vérifications expérimentales décrites au dernier Chapitre sont d'ailleurs d'autant plus satisfaisantes qu'elles ont porté sur des panneaux réels, avec toute la complexité qu'y introduisent les imperfections de scellement, l'élasticité des raidisseurs, etc., et non sur des systèmes schématisés, spécialement construits en vue de répondre aux hypothèses simplificatrices de la théorie. Ceci est vrai surtout des panneaux à revêtements poreux, que nous avons pris tels que nous les fournissait l'industrie, avec des hétérogénéités et des complications que leurs inventeurs jugent favorables à quelque égard, mais qui, en tout état de cause, les éloignent du matériau poreux schématique.

Par ailleurs, les expériences faites ne manquent pas d'intérêt en elles-mêmes. En faisant abstraction de la théorie qui les corrobore, on peut encore en tirer quelques conclusions qui nous semblent avoir leur importance pour les applications techniques. En particulier :

1° Il n'y a pas d'intérêt à multiplier le réseau de raidisseurs d'une coque vibrante, du point de vue acoustique; bien au contraire, des mailles de grande surface sont favorables à l'absorption du son par transmission;

2° Dans cette absorption, les panneaux élastiques jouent un rôle primordial; l'effet des revêtements, dits insonorisants, est secondaire : une diminution de transparence, de l'ordre d'une dizaine de décibels est, semble-t-il, tout ce que l'on peut en espérer dans les conditions les plus favorables. La nature et la masse des revêtements semble, d'ailleurs, jouer beaucoup moins de rôle que leur constitution géométrique. Nous avons pris connaissance avec une grande satisfaction, au moment de terminer la rédaction de ce travail, d'un récent Mémoire de N. FLEMING (1), où cet auteur, résumant les résultats de plus de vingt ans d'expériences au « National Physical Laboratory », formule des conclusions empiriques dont beaucoup sont identiques à celles que, pour des raisons théoriques, nous jugions vraisemblables dès le début de notre étude. Il nous semble que, seules,

(1) FLEMING, 1946.

les parois multiples du genre de celles étudiées aux §§ 18, 22 et 34 sont susceptibles d'effets plus intéressants; à cet égard, notre étude fournit les bases sur lesquelles un travail technique de réalisation pourrait être entrepris. Un autre point qui reste à examiner est celui des coques courbes : la théorie en est très difficile, mais l'installation, décrite au Chapitre IX, se prête fort bien à une étude expérimentale, qui pourrait y suppléer en partie. Nous avons l'intention de l'utiliser largement dans ce but.

Du point de vue de la Dynamique analytique, nous croyons la théorie du couplage monovalent susceptible de diverses applications, outre celles que nous avons traitées ici. Il y a un autre mode de couplage que nous avons rencontré, et qui mériterait peut-être une étude plus approfondie : c'est celui à « monovalence unidirectionnelle » (§ 23), dont il faut rapprocher également le couplage unidirectionnel qui se présente, en deuxième approximation, entre la variable résonnante et celle dont l'amplitude est restée infiniment petite.

BIBLIOGRAPHIE

- BALLANTINE S., 1931 : *Electronics*, janvier; et 1933 : *J. Ac. Soc. Am.*, juillet.
CANAC F., 1944 : *Cahiers de Physique*, 24, 76.
CANAC et VOGEL, 1946 : Congrès nat. Aviat. franç., rapport n° 424.
CHAVASSE P., 1943 : *C.R. Paris*, 217, 675.
DAVIS A.H., 1927 : *Phil. Mag.* (7), 3, 177.
DAVIS A.H., 1933 : *Phil. Mag.* (7), 15, 309.
FLEMING N., 1946 : *J. Roy. Aer. Soc.*, 50, 639 (septembre).
HARRIS C.M., 1945 : *J. Ac. Soc. Am.*, 17, 35.
JANNIN Y., 1944 : *Cah. Phys.*, 24, 78.
KOSTEN et ZWIKKER, 1941 : *Physica*, 8, 251; 933; 968 et sqq.
MONNA, 1938 : *Physica*, 5, 129.
MORSE et BOLT, 1944 : *Rev. Mod. Phys.*, 16, 69.
RAYLEIGH Lord, 1896 : *Theory of Sound* (2nd ed.), London (Macmillan).
ROCARD Y., 1943 : *Dynamique générale des Vibrations*, Paris (Masson).
SCOTT R.A., 1946 : *Proc. Phys. Soc.*, 58, 165.
SCOTT R.A., 1946 a : *Proc. Phys. Soc.*, 58, 358.
TIMOSHENKO S., 1943 : *Théorie de la Stabilité élastique* (trad. fr.), Paris (Béranger).
VOGEL Th., 1945 : *C.R.S.I.M.*, note 64.
VOGEL Th., 1946 a : *J. de Phys.*, juillet.
VOGEL Th., 1946 b : *Rev. Scient.* 84, 515.
ZWIKKER C., 1936 : *De Ingenieur*, 47, 177 A.
ZWIKKER, VAN DER ELJK et KOSTEN, 1941 : *Physica*, 8, 469; 1094.
-



DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

SUR LA MESURE DES CONTRAINTES ÉLASTIQUES DANS LES MÉTAUX AU MOYEN DES RAYONS X

Vu et approuvé :

Marseille, le 11 février 1947

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

E. TRAYNARD

Vu et permis d'imprimer :

Aix, le 13 février 1947

Le Recteur de l'Académie d'Aix-en-Provence,

E. BLACHE



